1 Нечеткие множества

В этой главе представлены некоторые фундаментальные понятия нечеткой теории множеств.

Пусть X, Y, и Z обозначают непустые множества. По умолчанию I обозначает произвольное непустое множество индексов.

Определение 1.0.1. *Нечеткое множество X — это отображение из X в $[0,1]$. Множество всех нечетких множеств X обозначают $\mathcal{FP}(X)$.*

Определение 1.0.2. *Пусть $\mu \in \mathcal{FP}(X)$. Тогда множество $\{\mu(x) \mid x \in X\}$ называется образом μ и обозначается $\mu(X)$ или $Im(\mu)$. Множество $\{x \mid x \in X, \mu(x) > 0\}$ называется носителем μ и обозначается μ^*.*

В частности μ называют конечным нечетким множеством, если μ^* — конечное множество, и бесконечным нечетким множеством, если μ^* – бесконечное множество.

Определение 1.0.3. *Пусть $Y \subseteq X$ и $a \in [0,1]$. Обозначим $a_Y \in \in \mathcal{FP}(X)$. Тогда:*

$$a_Y(x) = \begin{cases} a, \ \forall x \in Y \\ 0, \ \forall x \in X \backslash Y. \end{cases}$$

В частности, если Y состоит из одного элемента $\{y\}$, то $a_{\{y\}}$ называется нечеткой точкой (или нечетким синглтоном), и обозначается y_a.

Обозначим через 1_Y характеристическую функцию Y. Если S — множество нечетких точек, то нижняя граница $foot(S) = \{y \in X \mid y_a \in S\}$.

Определение 1.0.4. *Пусть $\mu, \nu \in \mathcal{FP}(X)$. Если $\mu(x) \leqslant \nu(x)$ $\forall x \in \in X$, тогда говорят, что μ содержится в ν (или ν содержит μ), и записывают $\mu \subseteq \nu$ (или $\nu \supseteq \mu$). Если $\mu \subseteq \nu$ и $\mu \neq \nu$, тогда говорят, что μ собственно принадлежит ν, (или ν собственно содержит μ) и пишут $\mu \subset \nu$ (или $\nu \supset \mu$).*

Таким образом, отношение включения $\subseteq$ является отношением частичного порядка в $\mathcal{FP}(X)$.

Определение 1.0.5. *Пусть μ, $\nu \in \mathcal{FP}(X)$. Определим $\mu \cup \nu$ и $\mu \cap \cap \nu \in \mathcal{FP}(X)$ следующими равенствами:*

$$(\mu \cup \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x), \forall x \in X$$
$$(\mu \cap \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x), \forall x \in X$$

Выражения $\mu \cup \nu$ и $\mu \cap \nu$ называются объединением и пересечением соответственно.

Для любого набора $\{\mu_i \mid i \in I\}$ из нечеткого подмножества X, где I является непустым множеством индексов, точная верхняя грань $\cup_{i \in I} \mu_i$ и точная нижняя грань $\cap_{i \in I} \mu_i$ задается $\forall x \in X$ соответственно:

$$(\cup_{i \in I} \mu_i)(x) = \vee_{i \in I} \mu_i(x),$$
$$(\cap_{i \in I} \mu_i)(x) = \wedge_{i \in I} \mu_i(x).$$

Определение 1.0.6. *Пусть* $\mu, \nu \in \mathcal{FP}(X)$. *Для* $a \in [0,1]$ *определим* $\mu_a = \{x \mid x \in X,\ \mu(x) \geqslant a\}$. *Тогда* μ_a *называется* a*-сечеением (*a*-уровнем) нечеткого множества* μ.

Очевидно, что для $\mu, \nu \in \mathcal{FP}(X)$,

1) $\mu \subseteq \nu,\ a \in [0,1] \Rightarrow \mu_a \subseteq \nu_a$,

2) $a \leqslant b,\ a, b \in [0,1] \Rightarrow \mu_b \subseteq \mu_a$,

3) $\mu = \nu \Leftrightarrow \mu_a = \nu_a\ \forall a \in [0,1]$.

Следующие теоремы описывают основные свойства a-сечения нечеткого множества.

Теорема 1.0.7. *Предположим, что* $\{\mu_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{FP}(X)$. *Тогда для любого* $a \in [0,1]$ *справедливо:*

1) $\cup_{i\in I}(\mu_i)_a \subseteq (\cup_{i\in I}\mu_i)_a$,

2) $\cup_{i\in I}(\mu_i)_a \subseteq (\cup_{i\in I}\mu_i)_a$.

Кроме того, если I *конечно, то получаем эквивалентное равенство в 1).*

Доказательство. Доказательство этой теоремы следует из определения. $\square$

Теорема 1.0.8. *Пусть* $\mu \in \mathcal{FP}(X)$ *и* $\{a_i \mid i \in I\}$ *непустое подмножество отрезка* $[0,1]$.*Пусть* $b = \wedge_{i\in I}a_i$ *и* $c = \vee_{i\in I}a_i$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\cup_{i\in I}\mu_{a_i} \subseteq \mu_b$,

2) $\cap_{i\in I}\mu_{a_i} = \mu_c$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы также следует из определения. $\square$

Теорема 1.0.9. *Пусть* $\mu \in \mathcal{FP}(X)$. *Тогда* $\mu = \cup_{a\in[0,1]}a_{\mu_a} = \cup \cup_{a\in\mu(X)}a_{\mu_a}$.

Доказательство. Пусть $x \in X$. Тогда: $(\cup_{a\in[0,1]}a_{\mu_a})(x) = \vee \vee_{a\in[0,1]}a_{\mu_a}(x) = \vee\{a \in [0,1] \mid a \leqslant \mu(x)\} = \mu(x)$. Таким образом $\mu = \cup \cup_{a\in[0,1]}a_{\mu_a}$. Точно так же $\mu = \cup_{a\in\mu(X)}a_{\mu_a}$. $\square$

Определение 1.0.10. *Пусть* I *— непустое множество индексов, и* $\{X_i \mid i \in I\}$ *— семейство непустых множеств. Пусть* X *— это декартово произведение, а именно:*

$$X = \prod_{i\in I} X_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in X_i, i \in I\}$$

Пусть $\mu_i \in \mathcal{FP}(X_i)$ для всех $i \in I$. Определим нечеткое подмножество μ из X как $\mu(x) = \wedge_{i\in I}\mu_i(x_i)\ \forall x = (x_i)_{i\in I} \in X$. Тогда μ называется полным прямым произведением и обозначается

$$\mu = \widetilde{\prod_{i\in I}} \mu_i.$$

Если $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ тогда:

$$X = \prod_{i\in I} X_i = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n =$$
$$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Будем обозначать:

$$\mu = \widetilde{\prod_{i\in I}} \mu_i = \mu_1 \tilde{\otimes} \mu_2 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} \mu_n.$$

Ясно, что если μ_i, $\nu_i \in \mathcal{FP}(X_i)$, при условии $\mu_i \subseteq \nu_i$ $\forall i \in I$, то:

$$\widetilde{\prod_{i\in I}} \mu_i \subseteq \widetilde{\prod_{i\in I}} \nu_i.$$

Определение 1.0.11. *(Принцип расширения) Пусть f — функция, действующая из X в Y, и пусть $\mu \in \mathcal{FP}(X)$ и $\nu \in \mathcal{FP}(Y)$. Определим нечеткие подмножества $f(\mu) \in \mathcal{FP}(Y)$ и $f^{-1}(\nu) \in \mathcal{FP}(X)$ $\forall y \in Y$:*

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \vee\{\mu(x) \mid x \in X, f(x) = y\}, & \text{если } f^{-1}(y) \neq 0 \\ 0, & \text{в ином случае} \end{cases}$$

и для любого $x \in X$:

$$f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x)).$$

Тогда $f(\mu)$ называется образом функции f, $f^{-1}(\nu)$ называется прообразом функции f.

Отметим, что в определении 1.0.11, верхняя грань пустого множества является нулевым элементом.

Теорема 1.0.12. *Пусть даны функция f, действующая из X в Y и функция g, действующая из Y в Z. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) для всех $\mu_i \in \mathcal{FP}(X), i \in I, f(\cup_{i\in I}\mu_i) = \cup_{i\in I} f(\mu_i)$ и таким образом

$$\mu_1 \subseteq \mu_2 \Rightarrow f(\mu_1) \subseteq f(\mu_2) \quad \forall \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{FP}(X);$$

2) для всех $\nu_j \in \mathcal{FP}(Y)$, $j \in J$, где J — это непустое множество индексов,

$$f^{-1}(\cup_{j\in J}\nu_j) = \cup_{j\in J} f^{-1}(\nu_j),$$

$$f^{-1}(\cap_{j\in J}\nu_j) = \cap_{j\in J} f^{-1}(\nu_j),$$

и поэтому $\nu_1 \subseteq \nu_2 \Rightarrow f^{-1}(\nu_1) \subseteq f^{-1}(\nu_2)$ $\forall \nu_1, \nu_2 \in \mathcal{FP}(Y)$;

3) $f^{-1}(f(\mu)) \supseteq \mu$ $\forall \mu \in \mathcal{FP}(X)$. В частности, если f — инъекция, то

$$f^{-1}(f(\mu)) = \mu \ \forall \mu \in \mathcal{FP}(X).$$

Это означает, что $\mu \mapsto f(\mu)$ инъекция из $\mathcal{FP}(X)$ в $\mathcal{FP}(Y)$ и $\nu \mapsto f^{-1}(\nu)$ сюръекция из $\mathcal{FP}(Y)$ в $\mathcal{FP}(X)$;

4) $f(f^{-1}(\nu)) \subseteq \nu$ $\forall \nu \in \mathcal{FP}(Y)$. В частности, если f — сюръекция, тогда

$$f(f^{-1}(\nu)) = \nu \ \forall \nu \in \mathcal{FP}(Y).$$

Поэтому $\mu \mapsto f(\mu)$ сюръекция из $\mathcal{FP}(X)$ в $\mathcal{FP}(Y)$ и $\nu \mapsto f^{-1}(\nu)$ инъекция из $\mathcal{FP}(Y)$ в $\mathcal{FP}(X)$;

5) $f(\mu) \subseteq \nu \Leftrightarrow \mu \subseteq f^{-1}(\nu)$ $\forall \mu \in \mathcal{FP}(X)$ и $\forall \nu \in FP(Y)$.

6) $g(f(\mu)) = (g \circ f)(\mu)$ $\forall \mu \in \mathcal{FP}(X)$ и $f^{-1}(g^{-1}(\xi)) = (g \circ f)^{-1}(\xi)$ $\forall \xi \in \mathcal{FP}(Z)$.

Доказательство. Воспользуемся принципом расширения определения 1.0.11 и определением 1.0.5. Заметим, что доказательства утверждений 1) и 2) следуют из определения.

Докажем утверждение 3), для этого возьмём любое $\mu \in \mathcal{FP}(X)$. Тогда $f^{-1}(f(\mu))(x) = f(\mu)(f(x)) = \vee\{\mu(x') \mid x' \in X, f(x') = f(x)\} \supseteq \supseteq \mu(x)\ \forall x \in X$.

В частности, если f инъекция, тогда: $f^{-1}(f(\mu))(x) = \vee\{\mu(x') \mid x' \in \in X, f(x') = f(x)\} = \mu(x)\ \forall x \in X$. Утверждение 3) доказано.

Докажем 4), возьмём любое $\nu \in \mathcal{FP}(Y)$. Тогда

$$f(f^{-1}(\nu))(y) = \vee\{f^{-1}(\nu)(x) \mid x \in X, f(x) = y\} =$$
$$= \vee\{\nu(f(x)) \mid x \in X, f(x) = y\} =$$
$$= \begin{cases} \nu(y),\ y \in f(X) \\ 0,\ y \notin f(X) \end{cases} \leqslant \nu(y)\ \forall y \in Y.$$

Таким образом $f(f^{-1}(\nu))(y) = \nu(y)\ \forall y \in Y$, если f — сюръекция. Таким образом, утверждение 4) доказано.

Утверждение 5) вытекает из утверждений 1) - 4).

Докажем утверждение 6), для этого рассмотрим $\mu \in \mathcal{FP}(X)$ и $z \in \in Z$. Тогда $g(f(\mu))(z) = \vee\{f(\mu)(y) \mid y \in Y, g(y) = z\} = \vee\{\vee\{\mu(x) \mid x \in \in X, f(x) = y\} \mid y \in Y, g(y) = z\} = \vee\{\mu(x) \mid x \in X,\ (g \circ f)(x) = z\} = = (g \circ f)(\mu)(z)\ \forall z \in Z$.

Затем для всех $\xi \in \mathcal{FP}(Z)$ и $\forall x \in X$, $((g \circ f)^{-1}(\xi))(x) = \xi(g(f(x))) = = g^{-1}(\xi)(f(x)) = f^{-1}(g^{-1}(\xi))(x)$. □

Литература

1 Mordeson J.N. , Bhutani K.R., Rosenfeld A. Fuzzy Group Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2005. — 300 p.