2 Нечеткие подгруппы

Пусть G произвольная группа с бинарной мультипликативной операцией и единичным элементом e. Чтобы определить понятие нечеткой подгруппы и исследовать ее свойства, введем некоторые операции на нечетком подмножестве группы G в терминах групповых операций.

Определение 2.0.13. *Определим бинарную алгебраическую операцию «$\circ$» на $\mathcal{FP}(\mathcal{G})$ и обратную операцию $^{-1}$на $\mathcal{FP}(\mathcal{G})$ таким образом, что $\forall \mu, \nu \in \mathcal{FP}(G)$ и $\forall x \in G$, $(\mu \circ \nu)(x) = \vee\{\mu(y) \wedge \nu(z) \mid y, z \in G, yz = x\}$ и $\mu^{-1}(x) = \mu(x^{-1})$. Будем называть $\mu \circ \nu$ произведением μ и ν, а μ^{-1} обратным элементом.*

Легко проверить, что бинарная операция «$\circ$» в определении 2.0.13 ассоциативна.

Теорема 2.0.14. *Пусть $\mu, \nu, \mu_i \in \mathcal{FP}(G), i \in I$. Пусть $a = \vee \vee\{\mu(x) \mid x \in G\}$. Тогда верны следующие утверждения:*

1) $(\mu \circ \nu)(x) = \vee_{y \in G}(\mu(y) \wedge \nu(y^{-1}x)) = \vee_{y \in G}(\mu(xy^{-1}) \wedge \nu(y))\ \forall x \in G;$

2) $(a_y \circ \mu)(x) = \mu(y^{-1}x)\ \forall x, y \in G;$

3) $(\mu \circ a_y)(x) = \mu(xy^{-1})\ \forall x, y \in G;$

4) $(\mu^{-1})^{-1} = \mu;$

5) $\mu \subseteq \mu^{-1} \Leftrightarrow \mu^{-1} \subseteq \mu \Leftrightarrow \mu = \mu^{-1} \Leftrightarrow \mu(x) \leqslant \mu(x^{-1})\ \forall x \in G \Leftrightarrow \mu(x^{-1}) \leqslant \mu(x)\, \forall x \in G \Leftrightarrow \mu(x) = \mu(x^{-1})\ \forall x \in G$

6) $\mu \subseteq \nu \Leftrightarrow \mu^{-1} \subseteq \nu^{-1};$

7) $(\cup_{i \in I})^{-1} = \cup_{i \in I}\mu_i^{-1};$

8) $(\cap_{i \in I})^{-1} = \cap_{i \in I}\mu_i^{-1};$

9) $(\mu \circ \nu)^{-1} = \nu^{-1} \circ \mu^{-1}.$

Доказательство. Эта теорема может быть легко доказана, если применить определения, описанные ранее. Поэтому ее доказательство опускаем. □

Определение 2.0.15. *Пусть $\mu \in \mathcal{FP}(G)$. Тогда μ называется нечеткой подгруппой группы G, если:*

1) $\mu(xy) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(y)\ \forall x, y \in G;$

2) $\mu(x^{-1}) \geqslant \mu(x)\ \forall x \in G.$

Обозначим через $\mathcal{F}(G)$ множество всех нечетких подгрупп группы G. Положим $\mu_* = \{x \in G \mid \mu(x) = \mu(e)\}$, $\mu \in \mathcal{FP}(G)$ и напомним, что из определения 1.0.2, μ^* является носителем μ. Если $\mu \in \mathcal{FP}(G)$ удовлетворяет условию 1) из определения 2.0.15, тогда $\mu(x^n) \geqslant \mu(x)\ \forall x \in G$, где $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, μ удовлетворяет условиям 1) и 2) из определения 2.0.15 тогда и только тогда, когда $\mu(xy^{-1}) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(y)\ \forall x, y \in G$.

Замечание 2.0.16. *Если $\mu \in \mathcal{F}(G)$ и H подгруппа группы G, тогда $\mu|_H \in \mathcal{F}(H)$.*

Лемма 2.0.17. *Пусть $\mu \in \mathcal{F}(G)$. Тогда $\forall x \in G$ справедливы два утверждения:*

1) $\mu(e) \geqslant \mu(x);$

2) $\mu(x) = \mu(x^{-1}).$

Доказательство. Пусть $x \in G$. Тогда:

1) $\mu(e) = \mu(xx^{-1}) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(x^{-1}) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(x) = \mu(x)$.

2) $\mu(x) = \mu((x^{-1})^{-1}) \geqslant \mu(x^{-1}) \geqslant \mu(x)$.

Отсюда $\mu(x) = \mu(x^{-1})$.

Заметим, что если μ — это нечеткая подгруппа группы G и $x, y \in G$ так, что $\mu(x) \neq \mu(y)$, тогда $\mu(xy) = \mu(x) \wedge \mu(y)$: допустим $\mu(x) > \mu(y)$. Тогда $\mu(y) = \mu(x^{-1}xy) \geqslant \mu(x^{-1}) \wedge \mu(xy) = \mu(x) \wedge \mu(xy)$.

Таким образом, $\mu(y) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(xy)$ и значит $\mu(x) \geqslant \mu(y)$, отсюда следует, что $\mu(y) \geqslant \mu(xy) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(y) = \mu(y)$. Таким образом, $\mu(xy) = \mu(x) \wedge \mu(y)$. Подобный аргумент может использоваться для случая $\mu(y) > \mu(x)$. □

Лемма 2.0.18. *Пусть $\mu \in \mathcal{F}(G)$. Тогда μ является нечеткой подгруппой группы G тогда только тогда, когда μ_a — подгруппа группы G $\forall a \in \mu(G) \cup \{b \in [0,1] \mid b \leqslant \mu(e)\}$.*

Доказательство. Предположим, что μ — это нечёткая подгруппа группы G и пусть $a \in \mu(G)$. Затем предположим, что $\mu(e) \geqslant \mu(x)$ $\forall x \in G$, $e \in \mu_a$. Таким образом $\mu_a \neq 0$. Пусть $x, y \in \mu_a$. Тогда $\mu(x) \geqslant a$ и $\mu(y) \geqslant a$. Так как μ — это нечёткая подгруппа, то $\mu(xy^{-1}) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(y) \geqslant a \wedge a = a$. Отсюда $xy^{-1} \in \mu_a$ и таким образом μ_a — это подгруппа группы G. Аналогично, если $a \leqslant \mu(e)$, тогда точно так же можно показать, что μ_a — это подгруппа группы G.

Обратно, предположим, что μ_a — это подгруппа группы G $\forall a \in \mu(G) \cup \{b \in [0,1] \mid b \leqslant \mu(e)\}$. Тогда $\forall a \in \mu(G)$ должно существовать $e \in \mu_a$ из этого следует, что $\mu(e) \geqslant a$. Пусть $x, y \in G$ и пусть $\mu(x) = a$ и $\mu(y) = a$. Пусть $c = a \wedge b$. Тогда $x, y \in \mu_c$ и $c \leqslant \mu(e)$. В соответствии с предположением, μ_c подгруппа группы G и таким образом $xy^{-1} \in \mu_a$. Отсюда $\mu(xy^{-1}) \geqslant c = a \wedge b = \mu(x) \wedge \mu(y)$. Следовательно μ — это нечёткая подгруппа группы G. □

Следующие три результата могут быть доказаны с использованием раннее введенных понятий.

Следствие 2.0.19. *Если $\mu \in \mathcal{F}(G)$, тогда μ_* является подгруппой G.*

Теорема 2.0.20. *Если $\mu \in \mathcal{F}(G)$, тогда μ^* является подгруппой G.*

Доказательство. Пусть $a, b \in \mu^*$. Тогда выполняются следующие два условия:

1) $ab \in \mu^*$;

2) $a^{-1} \in \mu^*$.

Таким образом:

1) $\mu(ab) \geqslant \mu(a) \wedge \mu(b) > 0 \Rightarrow \mu(ab) \geqslant 0 \Rightarrow \mu(ab) \in \mu^*$;

2) $\mu(a^{-1}) = \mu(a) = \mu(e) > 0$.

Следовательно, μ^* является подгруппой группы G. □

Теорема 2.0.21. *Пусть $\mu \in \mathcal{FP}(G)$. Тогда $\mu \in \mathcal{F}(G)$ тогда и только тогда, когда μ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\mu \circ \mu \subseteq \mu$;

2) $\mu^{-1} \subseteq \mu$ *(или* $\mu^{-1} \supseteq \mu$*, или* $\mu^{-1} = \mu$*).*

Доказательство. Пусть $\mu \in \mathcal{F}(G)$. Тогда: 1) $(\mu \circ \mu)(x) = \vee\{\mu(y) \wedge \wedge\, \mu(z) \mid x = yz\}, \mu(yz) \geqslant \mu(y) \wedge \mu(z)$.

Следовательно $(\mu \circ \mu)(x) = \mu(x)$, а значит $\mu \circ \mu \subseteq \mu$.

Утверждение 2) доказывается из условия $\mu^{-1}(x) = \mu(x^{-1})$ и по теореме 2.0.14. □

Теорема 2.0.22. *Пусть* $\mu, \nu \in \mathcal{F}(G)$*. Тогда* $\mu \circ \nu \in \mathcal{F}(G)$ *тогда и только тогда, когда* $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$*.*

Доказательство. Предположим, что $\mu \circ \nu \in \mathcal{F}(G)$, тогда $\mu \circ \nu = \mu^{-1} \circ \nu^{-1} = (\nu \circ \mu)^{-1} = \nu \circ \mu$.

Обратно, предположим, что $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$. Тогда:

$(\mu \circ \nu)^{-1} = (\nu \circ \mu)^{-1} = \mu^{-1} \circ \nu^{-1} = \mu \circ \nu$ и $(\mu \circ \nu) \circ (\mu \circ \nu) = \mu \circ (\nu \circ \mu) \circ \nu = \mu \circ (\mu \circ \nu) \circ \nu = (\mu \circ \mu) \circ (\nu \circ \nu) \subseteq \mu \circ \nu$.

Следовательно, по теореме 2.0.21, $\mu \circ \nu \in \mathcal{F}(G)$. □

Определение 2.0.23. *Пусть* $\mu \in \mathcal{F}(G)$ *и* $\langle \mu \rangle = \cap\{\nu \mid \mu \subseteq \nu, \nu \in \mathcal{F}(G)\}$*. Тогда* $\langle \mu \rangle$ *называется нечеткой подгруппой группы* G *порожденной* μ*.*

Ясно, что $\langle \mu \rangle$ является наименьшей нечеткой подгруппой группы G, содержащей μ. Далее представим другой способ построения $\langle \mu \rangle$. Определим $\mu^1 = \mu$ и $\mu^n = \mu^{n-1} \circ \mu\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > 1$.

Литература

1 Mordeson J.N. , Bhutani K.R., Rosenfeld A. Fuzzy Group Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2005. — 300 p.