3 Нормальные нечёткие подгруппы

Понятие нормальной подгруппы — одно из центральных понятий классической теории групп. Это понятие играет важную роль в исследовании общей структуры групп. Точно так же, как и нормальная подгруппа, нормальная нечеткая подгруппа играет подобную роль в теории нечетких подгрупп.

Теорема 3.0.24. *Пусть $\mu \in \mathcal{FP}(G)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\mu(yx) = \mu(xy)\ \forall x, y \in G$; в этом случае, μ называют абелевым нечётким подмножеством;

2) $\mu(xyx^{-1}) = \mu(y)\ \forall x, y \in G$;

3) $\mu(xyx^{-1}) \geqslant \mu(y)\ \forall x, y \in G$;

4) $\mu(xyx^{-1}) \leqslant \mu(y)\ \forall x, y \in G$;

5) $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu\ \forall \nu \in \mathcal{FP}(G)$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2): Пусть $x, y \in G$. Тогда $\mu(xyx^{-1}) = \mu(x^{-1} \cdot \cdot xy) = \mu(y)$.

2) $\Rightarrow$ 3): Очевидно.

3) $\Rightarrow$ 4): $\mu(xyx^{-1}) \leqslant \mu(x^{-1} \cdot xyx^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1}) = \mu(y)\ \forall x, y \in G$.

4) $\Rightarrow$ 1): Пусть $x, y \in G$. Тогда $\mu(xy) = \mu(x \cdot yx \cdot x^{-1}) \leqslant \mu(xy) = \mu(y \cdot \cdot xy \cdot y^{-1}) \leqslant \mu(xy)$. Следовательно $\mu(xy) = \mu(yx)$.

1) $\Rightarrow$ 5): Пусть $x \in G$. Тогда $(\mu \circ \nu)(x) = \vee_{y \in G}\{\mu(xy^{-1}) \wedge \nu(y)\} = \vee \vee_{y \in G}\{\mu(y^{-1}x) \wedge \nu(y)\} = (\nu \circ \mu)(x)$. Следовательно $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$.

5) $\Rightarrow$ 1): Пусть $1_{\{y^{-1}\}} \circ \mu = \mu \circ 1_{\{y^{-1}\}}\ \forall y \in G$. Таким образом $(1_{\{y^{-1}\}} \circ \mu)(x) = (\mu \circ 1_{\{y^{-1}\}})(x) \forall x, y \in G$. Следовательно $\mu(yx) = \mu(xy) \forall x, y \in G$. □

Определение 3.0.25. *Пусть $\mu \in \mathcal{F}(G)$. Тогда μ называется нормальной нечёткой подгруппой группы G , если μ является абелевой нечёткой подгруппой группы G.*

Если $\mu, \nu \in \mathcal{F}(G)$ и существует $u \in G$ такое, что $\mu(x) = = \nu(uxu^{-1})\ \forall x \in G$, тогда μ и ν называются сопряжёнными нечёткими подгруппами (посредством u) и пишут $\mu = \nu^u$, где $\nu^u(x) = \nu(uxu^{-1})\ \forall x \in \in G$.

Ясно, что 1_G и $1_{\{e\}}$ являются нормальными нечёткими подгруппами группы G. Если G — коммутативная группа, то каждая нечёткая подгруппа группы G является нормальной. Нечёткая подгруппа μ группы G является нормальной тогда и только тогда, когда $\mu = \mu^z\ \forall z \in G$.

Теорема 3.0.26. *Пусть $\mu \in \mathcal{FP}(G)$. Тогда $\mu \in \mathcal{NF}(G)$ тогда и только тогда, когда μ_a является нормальной нечёткой подгруппой группы $G\ \forall a \in \mu(G) \cup \{b \in [0, 1] \mid b \leqslant \mu(e)\}$.*

Доказательство. Предположим, что $\mu \in \mathcal{NF}(G)$. Пусть $a \in \mu(G) \cup \cup \{b \in [0, 1] \mid b \leqslant \mu(e)\}$. Поскольку $\mu \in \mathcal{F}(G)$, то μ_a является нормальной нечёткой подгруппой группы G. Если $x \in G$ и $y \in \mu_a$, то из теоремы 3.0.24 следует, что $\mu(xyx^{-1}) = \mu(y) \geqslant a$. Таким образом $xyx^{-1} \in \mu_a$. Следовательно, μ_a является нормальной нечёткой подгруппой группы G.

Обратно, предположим, что μ_a является нормальной нечёткой подгруппой группы $G\ \forall a \in \mu(G) \cup \{b \in [0,1] \mid b \leqslant \mu(e)\}$. Согласно лемме 2.0.18 имеем, что $\mu \in \mathcal{F}(G)$. Пусть $x, y \in G$ и $a = \mu(y)$. Тогда $y \in \mu_a$ и тогда $xyx^{-1} \in \mu_a$. Следовательно $\mu(xyx^{-1}) \geqslant a = \mu(y)$. Что удовлетворяет условию 3) из теоремы 3.0.24. А значит $\mu \in \mathcal{NF}(G)$. □

Теорема 3.0.27. *Пусть $\mu \in \mathcal{NF}(G)$. Тогда μ_* и μ^* — нормальные нечёткие подгруппы группы G.*

Доказательство. Поскольку $\mu \in \mathcal{F}(G)$, из леммы 2.0.18 следует, что μ_* и μ^* — подгруппы группы G. Пусть $x \in G$ и $y \in \mu_*$. Поскольку μ удовлетворяет утверждению 2) теоремы 3.0.24, имеем $\mu(xyx^{-1}) = \mu(y) = \mu(e)$ и таким образом $xyx^{-1} \in \mu_*$. Следовательно, μ_* является нормальной подгруппой группы G. Пусть $x \in G$ и $y \in \mu^*$. Поскольку μ удовлетворяет утверждению 2) теоремы 3.0.24, из этого следует, что $\mu(xyx^{-1}) = \mu(y) > 0$ и так $xyx^{-1} \in \mu^*$. Поэтому μ^* является нормальной подгруппой группы G. □

Пример 3.0.28. *Обратная теорема теореме 3.0.27 не верна, как можно заметить в следующем примере. Пусть G группа, а H подгруппа этой группы, которая не является нормальной. Определим нечёткое подмножество μ группы G, при котором $\mu(e) = 1$, $\mu(x) = \frac{1}{2}$ если $x \in H \backslash \{e\}$, и $\mu(x) = \frac{1}{4}$ если $x \in G \backslash H$. Тогда μ — это нечёткая подгруппа группы G, т.к. его множества уровня являются подгруппами группы G. Уровень $\mu_{\frac{1}{2}} = H$ не является нормальным в G. Следовательно, μ не является нормальной нечёткой подгруппой группы G. Однако уровни $\mu_* = e$ и $\mu^* = G$ являются нормальными в G.*

Теорема 3.0.29. *Предположим, что $\mu \in \mathcal{F}(G)$. Пусть $N(\mu) = \{x \mid x \in G,\ \mu(xy) = \mu(yx)\ \forall y \in G\}$. Тогда $N(\mu)$, $\mu|_{N(\mu)}$ нормальные нечёткие подгруппы группы $N(\mu)$.*

Доказательство. Ясно, что $e \in N(\mu)$. Пусть $x, y \in N(\mu)$. Для любого $z \in G$, видим, что $\mu(xy^{-1} \cdot z) = \mu(x \cdot y^{-1}z) = \mu(y^{-1}z \cdot x) = \mu(x^{-1}z^{-1} \cdot y) = \mu(y \cdot x^{-1}z^{-1}) = \mu(z \cdot xy^{-1})$. Таким образом $xy^{-1} \in N(\mu)$. Следовательно, $N(\mu)$ подгруппа группы G.

Из замечания 2.0.16 следует, что $\mu|_{N(\mu)} \in \mathcal{F}(N(\mu))$ и $\mu|_{N(\mu)}(xy) = \mu|_{N(\mu)}(yx)\ \forall x, y \in N(\mu)$. Таким образом $\mu|_{N(\mu)} \in \mathcal{NF}(N(\mu))$. □

Подгруппа $N(\mu)$ группы G, определенная в теореме 3.0.29 называется нормализатором μ в группе G.

Теорема 3.0.30. *Пусть $\nu \in \mathcal{F}(G)$. Тогда мощность множества $\{\nu^u | u \in G\}$ равна индексу $[G : N(\nu)]$ нормализатора $N(\nu)$ в G.*

Доказательство. Пусть $u, v \in G$. Тогда: $\nu^u = \nu^v \Leftrightarrow \nu(uxu^{-1}) = \nu(vxv^{-1})\ \forall x \in G \Leftrightarrow \nu(uv^{-1} \cdot x) = \nu(x \cdot uv^{-1})\ \forall x \in G \Leftrightarrow uv^{-1} \in N(\nu) \Leftrightarrow u^{-1}N(\nu) = v^{-1}N(\nu)$. Таким образом, $\nu^u \mapsto u^{-1}N(\nu)$ есть биекция из $\{\nu^u \mid u \in G\}$ в $\{uN(\nu) \mid u \in G\}$. □

Пусть $\mu \in \mathcal{F}(G)$ и $x \in G$. Нечеткие подмножества $\mu(e)_{\{x\}} \circ \mu$ и $\mu \circ \mu(e)_{\{x\}}$ относятся к левому классу и правому классу μ относительно x, и записываются как $x\mu$ и μx, соответственно. Из теоремы 3.0.24 известно, что, если $\mu \in \mathcal{NF}(G)$, то левый класс $x\mu$ — это правый класс μx. Таким образом, в этом случае для краткости говорят $x\mu$ класс.

Теорема 3.0.31. *Пусть $\mu \in \mathcal{F}(G)$. Тогда $\forall x, y \in G$ справедливо:*

1) $x\mu = y\mu \Leftrightarrow x\mu_* = y\mu_*$;

2) $\mu x = \mu y \Leftrightarrow \mu_* x = \mu_* y$.

Доказательство. Предположим, что $x\mu = y\mu$. Тогда $\mu(e)_{\{x\}} \circ \mu = \mu(e)_{\{y\}} \circ \mu$, что означает $\mu(x^{-1}z) = \mu(y^{-1}z)\ \forall z \in G$. Выберем $z = y$, что даёт $\mu(x^{-1}y) = \mu(y^{-1}y) = \mu(e)$ и таким образом $x^{-1}y \in \mu_*$. Следовательно $x\mu_* = y\mu_*$. Обратно, предположим, что $x\mu_* = y\mu_*$. Тогда $x^{-1}y \in \mu_*$ и $y^{-1}x \in \mu_*$. Следовательно $\mu(x^{-1}z) = \mu(x^{-1}y \cdot y^{-1}z) \geqslant \mu(x^{-1}y) \wedge \mu(y^{-1}z) = \mu(e) \wedge \mu(y^{-1}z) = \mu(y^{-1}z) \forall z \in G$. Аналогично, $\mu(y^{-1}z) \geqslant \mu(x^{-1}z)\ \forall z \in G$. Поэтому $\mu(x^{-1}z) = \mu(y^{-1}z)\ \forall z \in G$, что показывает, что $x\mu = y\mu$. Аналогично доказывается и утверждение 2) теоремы. □

Теорема 3.0.32. *Пусть $\mu \in \mathcal{NF}(G)$ и $x, y \in G$. Если $x\mu = y\mu$, тогда $\mu(x) = \mu(y)$.*

Доказательство. Предположим, что $x\mu = y\mu$. По теореме 3.0.31, $x^{-1}y \in \mu_*$ и $y^{-1}x \in \mu_*$. Так как $\mu \in \mathcal{NF}(G)$, то это значит, что $\mu(x) = \mu(y^{-1}xy) \geqslant \mu(y^{-1}x) \wedge \mu(y) = \mu(e) \wedge \mu(y) = \mu(y)$.

Аналогично, $\mu(y) \geqslant \mu(x)$ и поэтому $\mu(x) = \mu(y)$. □

Пусть $\mu \in \mathcal{NF}(G)$, рассмотрим $G/\mu = \{x\mu | x \in G\}$. Тогда G/μ является группой и называется фактор-группой по нормальной нечеткой подгруппе μ.

Теорема 3.0.33. *Пусть $\mu \in \mathcal{NF}(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $(x\mu) \circ (y\mu) = (xy)\mu\ \forall x, y \in G$;

2) $G/\mu \cong G/\mu_*$;

3) пусть $\mu^{(*)} \in \mathcal{FP}(G/\mu)$ определяется как $\mu^{(*)}(xy) = \mu(x)\ \forall x \in G$. Тогда $\mu^{(*)} \in \mathcal{NF}(G/\mu)$.

Теорема 3.0.34. *Пусть $\nu \in \mathcal{F}(G)$ и N нормальная подгруппа группы G. Определим $\xi \in \mathcal{FP}(G/N)$ следующим равенством $\xi(xN) = \vee\{\nu(z) | z \in xN\}\ \forall x \in G$. Тогда $\xi \in \mathcal{F}(G/N)$.*

Доказательство. Пусть $\xi((xN)^{-1}) = \xi(x^{-1}N) = \vee\{\nu(z) \mid z \in x^{-1}N\} = \vee\{\nu(\omega^{-1}) \mid \omega^{-1} \in x^{-1}N\} = \vee\{\nu(\omega) \mid \omega \in xN\} = \xi(xN)\ \forall x \in G; \xi(xNyN) = \vee\{\nu(z) | z \in xyN\} = \vee\{\nu(uv) \mid u \in xN, v \in yN\} \geqslant \vee\{\nu(u) \wedge \nu(v) \mid u \in xN, v \in yN\} = (\vee\{\nu(u) \mid u \in xN\}) \wedge (\vee\{\nu(v) \mid v \in yN\}) = \xi(xN) \wedge \xi(yN)\ \forall x, y \in G$. Следовательно $\xi \in F(G/N)$. □

Нечёткая подгруппа ξ, определенная в теореме 3.0.34, называется нечеткой фактор-группой нечеткой подгруппы ν в G по нормальной подгруппе N, и обозначается ν/N.

Литература

1 Mordeson J.N. , Bhutani K.R., Rosenfeld A. Fuzzy Group Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2005. — 300 p.