4 Гомоморфизмы и изоморфизмы

Определение 4.0.35. *Пусть $\mu, \nu \in \mathcal{F}(G)$ и $\mu \subseteq \nu$. Тогда μ называется нормальной нечеткой подгруппой нечеткой подгруппы ν и записывается как $\mu \lhd \nu$, если*

$$\mu(xyx^{-1}) \geq \mu(y) \vee \nu(x)\ \forall x, y \in G$$

Следующие утверждения следуют из определения 4.0.35:

1) если G_1 и G_2 — подгруппы группы G, тогда G_1 является нормальной подгруппой группы G_2 тогда и только тогда, когда 1_{G_1} — нормальная подгруппа группы 1_{G_2};

2) если $\nu \in \mathcal{NF}(G), \nu \in \mathcal{F}(G)$ и $\mu \subseteq \nu$, тогда μ нормальная нечеткая подгруппа ν;

3) каждая нечеткая подгруппа является нормальной нечеткой подгруппой в самой себе;

4) $\mu \in \mathcal{FP}(G)$ является нормальной нечеткой подгруппой группы G тогда и только тогда, когда μ — нормальная нечеткая подгруппа нечеткой подгруппы 1_G.

Теорема 4.0.36. *Пусть $\mu, \nu \in \mathcal{F}(G)$ и $\mu \subseteq \nu$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) μ является нормальной нечеткой подгруппой подгруппы ν;

2) $\mu(yx) \geq \mu(xy) \vee \nu(y)\ \forall x, y \in G$;

3) $\mu(e)_x \circ \mu \supseteq (\mu \circ \mu(e)_x) \cap \nu\ \forall x \in G$.

Теорема 4.0.37. *Пусть $\mu, \nu \in \mathcal{F}(G)$ и μ — нормальная нечеткая подгруппа подгруппы ν. Тогда μ_* является нормальной подгруппой ν_* и μ^* является нормальной подгруппой ν^**

Теорема 4.0.38. *Пусть $\mu, \nu \in \mathcal{F}(G)$ и μ — нормальная нечеткая подгруппа подгруппы ν. Пусть H — группа и f — гомоморфизм из G в H. Тогда $f(\mu)$ является нормальная нечеткой подгруппой $f(v)$.*

Доказательство. Заметим, что $f(\mu), f(\nu) \in \mathcal{F}(H)$ и $f(\mu) \subseteq \subseteq f(\nu)$. Теперь $(f(\mu))(xyx^{-1}) = \vee\{\mu(z) \mid z \in G, f(z) = xyx^{-1}\} \geq \vee \vee\{\mu(uvu^{-1}) \mid u, v \in G, f(u) = x, f(v) = y\} \geq \vee\{\mu(v) \wedge \nu(u) \mid u, v \in \in G, f(u) = x, f(v) = y\} = (\vee\{\mu(v) \mid v \in G, f(v) = y\}) \wedge (\vee\{\nu(u) \mid u \in \in G, f(u) = x\}) = (f(\mu))(y) \wedge (f(\nu))(x)\ \forall x, y \in H$. Следовательно, $f(\mu)$ — нормальная нечеткая подгруппа подгруппы $f(\nu)$. □

Теорема 4.0.39. *Пусть H — группа. Пусть $\mu, \nu \in \mathcal{F}(H)$ и μ — нормальная нечеткая подгруппа подгруппы ν. Пусть f — гомоморфизм из G в H. Тогда $f^{-1}(\mu)$ является нормальная нечеткой подгруппой $f^{-1}(v)$.*

Доказательство. Очевидно, что $f^{-1}(\mu), f^{-1}(\nu) \in \mathcal{F}(G)$. Это легко показать из $f^{-1}(\mu) \subseteq f^{-1}(\nu)$. Теперь $(f^{-1}(\mu))(xyx^{-1}) = = \mu(f(xyx^{-1})) = \mu(f(x)f(y)(f(x))^{-1}) \geq \mu(f(y)) \wedge \mu(f(x)) = (f^{-1}(\mu))(y) \wedge \wedge (f^{-1}(v))(x)\ \forall x, y \in G$. Следовательно, $f^{-1}(\mu)$ — нормальная нечеткая подгруппа подгруппы $f^{-1}(\nu)$. □

Определение 4.0.40. *Пусть G и H – группы и пусть $\mu \in \in \mathcal{F}(G), \nu \in \mathcal{F}(H)$.*

1) гомоморфизм f из G в H называется слабым гомоморфизмом из μ в ν, если $f(\mu) \subseteq \nu$ и обозначается как $\mu \overset{f}{\sim} \mu$ или $\mu \sim \mu$;

2) изоморфизм f из G в H называется слабым изоморфизмом из μ в ν, если $f(\mu) \subseteq \nu$ и обозначается как $\mu \overset{f}{\simeq} \mu$ или $\mu \simeq \mu$;

3) гомоморфизм f из G в H называется гомоморфизмом из μ в ν, если $f(\mu) = \nu$ и обозначается как $\mu \overset{f}{\approx} \mu$ или $\mu \approx \mu$;

4) изоморфизм f из G в H называется изоморфизм из μ в ν, если $f(\mu) = \nu$ и обозначается как $\mu \overset{f}{\cong} \mu$ или $\mu \cong \mu$.

Пусть $\mu, \nu \in \mathcal{F}(G)$. Предположим, что μ является нормальной нечеткой подгруппой подгруппы ν. Тогда по теореме 4.0.37 μ^* — нормальная подгруппа ν^*. Очевидно, что $\nu|_{\nu^*}$ — нечеткая подгруппа подгруппы ν^*. Таким образом, по теореме 3.0.34 существует нечеткая фактор-группа группы $\nu|_{\nu^*}$ по подгруппе μ^*. Для удобства обозначим данную нечеткую фактор-группу через ν/μ и назовем фактор-подгруппой группы ν по подгруппе μ.

Теорема 4.0.41. *Пусть $\mu, \nu \in \mathcal{F}(G)$ и μ является нормальной нечеткой подгруппой подгруппы ν. Тогда $\nu|_{\nu^*} \approx \nu/\mu$.*

Теорема 4.0.42. *Пусть $\nu \in \mathcal{F}(G)$. Предположим, что H группа и $\xi \in \mathcal{F}(H)$ такая, что $\nu \approx \xi$. Тогда существует нормальная нечеткая подгруппа μ группы ν такая, что $\nu/\mu \cong \xi|_{\xi^*}$.*

Теорема 4.0.43. *Пусть $\mu \in \mathcal{NF}(G)$ и $\nu \in \mathcal{F}(G)$ такие, что $\mu(e) = \nu(e)$. Тогда*

$$\nu/(\mu \cap \nu) \simeq (\mu \circ \nu)/\mu$$

Теорема 4.0.44. *Пусть $\mu, \nu, \xi \in \mathcal{F}(G)$ такие, что $\mu \subseteq \nu$ и ν является нормальной нечеткой подгруппой группы ξ. Тогда*

$$(\xi/\mu)/(\nu/\mu) \cong \xi/\nu$$

Литература

1 Mordeson J.N. , Bhutani K.R., Rosenfeld A. Fuzzy Group Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2005. — 300 p.