5 Нильпотентные нечеткие группы

Определение 5.0.45. *Пусть μ — нечеткое подмножество группы G. Тогда нормализатор μ в G есть множество $N(\mu) = \{x \in G \mid \mu(xy) = \mu(ux)\ \forall y \in G\}$ и μ называется нормальной в G, если $N(\mu) = G$.*

Определение 5.0.46. *Пусть μ является нечетким подмножеством полугруппы G. Пусть $Z(\mu) = \{x \in G \mid \mu(xyz) = \mu(yxz)\ \forall y, z \in G\}$. Тогда μ называют коммутативной в G, если $Z(\mu) = G$ и $Z(\mu)$ называется централизатором μ в G.*

Если G — полугруппа, то $Z(G)$ обозначает центр G. Очевидно, что $Z(G) \subseteq Z(\mu) \subseteq N(\mu)$

Рассмотрим определения центрального ряда нечеткой подгруппы и нильпотентной нечеткой подгруппы группы. Эти определения являются обобщениями центрального ряда группы и нильпотентной подгруппы группы соответственно.

Пусть μ — нечеткая подгруппа группы G. Пусть $Z^0(\mu) = \{e\}$ и π_0 — натуральный гомоморфизм из G в $G/Z^0(\mu)$. Предположим, что $Z^i(\mu)$ определены и $Z^i(\mu)$ — нормальные подгруппы группы G для $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Пусть π_i — натуральный гомоморфизм из G в $G/Z^i(\mu)$. Определим $Z^{i+1}(\mu) = \pi_i^{-1}(Z(\pi_i(\mu)))$. Тогда $Z^{i+1}(\mu) \supseteq \mathrm{Ker}(\pi_i) = Z^i(\mu)$ для $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Определение 5.0.47. *Пусть μ — нечеткая подгруппа группы G. Тогда центральный ряд μ определяется как возрастающая цепочка нормальных подгрупп из G.*

$$Z^0(\mu) \subseteq Z^1(\mu) \subseteq \ldots$$

Определение 5.0.48. *Нечеткая подгруппа μ группы G называется нильпотентной, если существует неотрицательное целое число такое, что $Z^m(\mu) = G$.*

Пусть G — группа с единицей e и пусть H — подгруппу группы G. Пусть $Z_n(H) = [Z_{n-1}(H), H]\ \forall n \in N$, где $Z_0(H) = H$. Тогда $Z_n(H)$ — подгруппа группы $G\ \forall n \in N$. Ряд $Z_0(H) \supseteq Z_1(H) \supseteq \ldots \supseteq Z_n(H) \supseteq \ldots$ называется убывающим центральным рядом подгруппы H. Подгруппа H называется нильпотентной, если $Z_n(H) = \{e\}$ для некоторого $n \geqslant 0$. Группа G называется нильпотентной, если она нильпотентна как подгруппа самой себя.

Теорема 5.0.49. *Пусть H — подгруппы группы G. Тогда H нильпотентна тогда и только тогда, когда нильпотента подгруппа 1_H.*

Пример 5.0.50. *Рассмотрим нетривиальный пример нильпотентной нечеткой подгруппы симметрической группы S_4 на $\{1, 2, 3, 4\}$. Пусть*

$$D_4 = \langle (24), (1234) \rangle = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (13), (24), (1234), (1432)\}$$

Тогда D_4 — подгруппа Диэдра группы S_4 с центром $C = \{(1), (13)(24)\}$. Пусть λ — нечеткое подмножество группы S_4, опреде-

ленное следующим образом:

$$\lambda(x) = 1 \text{ если } x \in C,$$
$$\lambda(x) = \frac{1}{2} \text{ если } x \in \langle(1234)\rangle \backslash C,$$
$$\lambda(x) = \frac{1}{4} \text{ если } x \in D_4 \backslash \langle(1234)\rangle,$$
$$\lambda(x) = 0 \text{ если } x \in S_4 \backslash D_4.$$

Очевидно, λ — нечеткая подгруппа группы S_4. Следовательно, нечеткая подгруппа $Z_1(\lambda)$ определена следующим образом:

$$Z_1(\lambda)((1)) = 1,\ Z_1(\lambda)((13)(24)) = \frac{1}{4},$$
$$Z_1(\lambda)(x) = 0 \text{ если } x \in S_4 \backslash C.$$

Из этого следует, что $Z_2(\lambda) = e_1$. Таким образом, λ — нильпотентная нечеткая подгруппа группы S_4 класса 2.

Пример 5.0.51. *Рассмотрим пример нормальной нечеткой подгруппы μ группы S_4, которая не является нильпотентной. Пусть $N = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Тогда N — нормальная подгруппа группы S_4 и N является абелевой. Пусть μ — нечеткое подмножество группы S_4, определенное следующим образом:*

$$\mu(x) = \frac{1}{2} \text{ если } x \in N,$$
$$\lambda(x) = \frac{1}{4} \text{ если } x \in A_4 \backslash N,$$
$$\lambda(x) = 0 \text{ если } x \in S_4 \backslash A_4.$$

Очевидно, μ — нормальная нечеткая подгруппа группы S_4. Тем не менее, $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_n(\mu)$ определенная как $Z_n(\mu)((1)) = \frac{1}{2}$, $Z_n(\mu)(x) = \frac{1}{4}$, если $x \in N \backslash \{(1)\}$, и $Z_n(\mu)(x) = 0$, если $x \in S_4 \backslash N$. Таким образом, μ не является нильпотентной подгруппой.

Литература

1 Mordeson J.N. , Bhutani K.R., Rosenfeld A. Fuzzy Group Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2005. — 300 p.