6 Нечеткие разрешимые подгруппы

Определение 6.0.52. *Пусть λ и μ — нечеткие подмножества группы G. Пусть (λ, μ) — нечеткое подмножество G, определенная следующим образом: $\forall x \in G$,*

$$(\lambda,\mu)(x) = \begin{cases} \vee\{\lambda(a) \wedge \mu(b) \mid x = [a,b], a, b \in G\}, & \text{если } x \text{ коммутатор } G \\ 0, & \text{в ином случае} \end{cases}$$

Коммутатор λ и μ — нечеткая подгруппа $[\lambda, \mu]$ группы G, порожденная (λ, μ).

Определение 6.0.53. *Пусть λ — нечеткая подгруппа группы G. Ряд $\lambda = \lambda^{(0)} \supseteq \lambda^{(1)} \supseteq \ldots \supseteq \lambda^{(n)} \supseteq \ldots$ нечетких подгрупп группы G называется производным рядом λ.*

Теорема 6.0.54. *Если λ — нормальная нечеткая подгруппа группы G, то все нечеткие подгруппы в производном ряду λ являются нормальными в G.*

Определение 6.0.55. *Пусть λ — нечеткая подгруппа группы G с окончанием t. Если производный ряд $\lambda = \lambda^{(0)} \supseteq \lambda^{(1)} \supseteq \ldots \supseteq \lambda^{(n)} \supseteq \ldots$ таков, что существует неотрицательное целое число m, что $\lambda^m = e_t$, то λ называется разрешимой подгруппой.*

Теорема 6.0.56. *Пусть H — подгруппы группы G. Тогда H разрешима тогда и только тогда, когда разрешима подгруппа 1_H.*

Пример 6.0.57. *Рассмотрим пример разрешимой нечеткой подгруппы симметрической группы S_4 на $\{1, 2, 3, 4\}$. Пусть*

$$D_4 = \langle (24), (1234) \rangle =$$
$$= \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (13), (24), (1234), (1432)\}$$

Тогда D_4 — подгруппа Диэдра группы S_4 с центром $C = \{(1), (13)(24)\}$. Пусть λ — нечеткое подмножество группы S_4, определенное следующим образом:

$$\lambda(x) = 1 \text{ если } x \in C,$$
$$\lambda(x) = \frac{1}{2} \text{ если } x \in \langle (1234) \rangle \backslash C,$$
$$\lambda(x) = \frac{1}{4} \text{ если } x \in D_4 \backslash \langle (1234) \rangle,$$
$$\lambda(x) = 0 \text{ если } x \in S_4 \backslash D_4.$$

Очевидно, λ — нечеткая подгруппа группы S_4. Следовательно, нечеткая подгруппа $\lambda^{(1)}$ определена следующим образом:

$$\lambda^{(1)}((1)) = 1,\ \lambda^{(1)}((13)(24)) = \frac{1}{4}$$

и

$$\lambda^{(1)}(x) = 0 \text{ если } x \in S_4 \backslash C.$$

Из этого следует, что $\lambda^{(2)} = e_1$. Таким образом, λ — разрешимая нечеткая подгруппа группы S_4.

Теорема 6.0.58. *Каждая нечеткая подгруппа разрешимой группы разрешима. В частности, если группа G не является разрешимой, то G имеет нетривиальную нечеткую подгруппу, которая не является разрешимой.*

Литература

1 Mordeson J.N. , Bhutani K.R., Rosenfeld A. Fuzzy Group Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2005. — 300 p.