

Лекция 2

Основные характеристики нечетких множеств

Пусть $\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\}$ — произвольное нечеткое множество (конечное или бесконечное) с элементами из универсума X и функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$.

Определение 2.1. Обобщением носителя нечеткого множества является понятие *множества -уровня*, под которым понимается обычное множество A_α , удовлетворяющее следующему условию: $A_\alpha = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$, где α — некоторое действительное число из интервала $[0, 1]$, т. е. $\alpha \in [0, 1]$.

Примечание

Иногда можно встретить также определение множества строгого -уровня, которое отличается строгим неравенством в условии: $A_\alpha = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$. Очевидно, в этом случае носитель произвольного нечеткого множества есть его множество строгого 0-уровня, т. е. справедливо формальное равенство: $A_0 = A_s$.

В качестве примера рассмотрим определенное выше нечеткое множество $\tilde{A}$, представляющее в некотором контексте *"небольшое натуральное число"* и равное:

$\tilde{A} = \{ \langle 1, 1.0 \rangle, \langle 2, 1.0 \rangle, \langle 3, 0.9 \rangle, \langle 4, 0.8 \rangle, \langle 5, 0.6 \rangle, \langle 6, 0.5 \rangle, \langle 7, 0.4 \rangle, \langle 8, 0.2 \rangle, \langle 9, 0.1 \rangle \}$. Тогда некоторые из его множеств -уровня равны: $A_{0.8} = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_{0.5} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A_{0.1} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Определение 2.2. Величина $h_{\tilde{A}} = \sup \{\mu_{\tilde{A}}(x)\}$, где супремум берется по всем значениям функции принадлежности для $x \in X$, называется *высотой нечеткого множества* $\tilde{A}$. Согласно этому определению, нечеткое множество $\tilde{A}$ пусто, если его высота в точности равна 0, т. е. $h_{\tilde{A}} = 0$.

Например, высота конечного нечеткого множества $\tilde{A}$ *"небольшое натуральное число"* равна 1 и соответствует двум элементам универсума: 1 и 2.

Рассмотрим в качестве еще одного примера бесконечное нечеткое множество $\tilde{B}$, которое представляет *"большое действительное число"*, с функцией принадлежности, заданной следующим математическим выражением: $\mu_{\tilde{B}}(x) = 0$ для $x \in [0, 1)$ и $\mu_{\tilde{B}}(x) = \frac{x-1}{x}$ для $x \in \mathbb{R}_+[0, 1)$. Высота этого нечеткого множества также равна 1, однако среди элементов универсума $X = \mathbb{R}_+$ отсутствуют числа, для которых $\mu_{\tilde{B}}(x) = 1$ (рис. 2.1). Действительно, какое бы число мы не рассмотрели, соответствующее значение функции принадлежности всегда будет строго меньше 1.

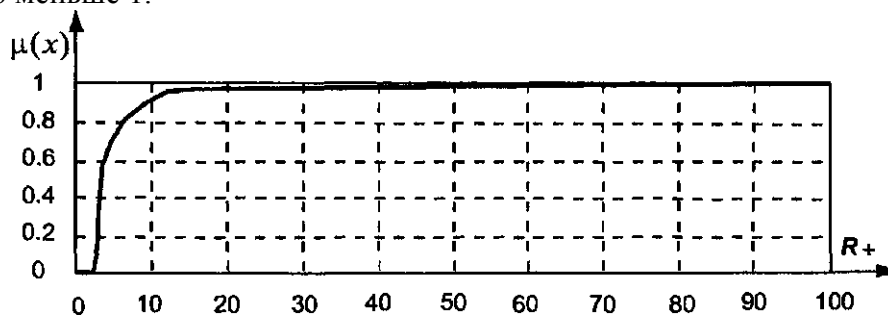


Рис. 2.1. График функции принадлежности бесконечного нечеткого множества $\tilde{B}$, которое представляет *"большое вещественное число"*

Особенность определения высоты заключается в том, что высота нечеткого множества всегда существует и равна некоторому действительному числу из интервала $[0, 1]$, которому может соответствовать несколько элементов универсума. Действительно, для конечных

нечетких множеств высота всегда равна максимальному значению их функций принадлежности. Для бесконечных нечетких множеств область значений соответствующих функций принадлежности всегда является компактным множеством, т. к. является подмножеством интервала $[0,1]$. А поскольку для произвольного компактного множества всегда существует наименьшая верхняя грань, то она и принимается по определению за высоту нечеткого множества.

Определение 2.3. Нечеткое множество $\tilde{A}$ называется **нормальным**, если максимальное значение его функции принадлежности равно 1. Формально это означает, что для нормального нечеткого множества необходимо выполнение следующего условия:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1, (\exists x \in X) \quad (2.1)$$

Например, нечеткое множество $\tilde{A}$ "*небольшое натуральное число*" является нормальным, поскольку его высота равна 1 и соответствует двум его элементам: 1 и 2. Напротив, нечеткое множество $\tilde{B}$ "*большое действительное число*" не является нормальным.

Определение 2.4. Если высота нечеткого множества равна единице ($h_{\tilde{A}} = 1$), но условие (2.1) не выполняется, то такое нечеткое множество будем называть **субнормальным**.

Очевидно, нечеткое множество $\tilde{B}$ "*большое действительное число*" является субнормальным.

Определение 2.5. **Ядром нечеткого множества** $\tilde{A}$ называется такое обычное множество A_1 , элементы которого удовлетворяют условию:

$$A_1 = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}.$$

Например, ядро нечеткого множества $\tilde{A}$ "*небольшое натуральное число*" равно двухэлементному множеству $A_1 = \{1, 2\}$. Нечеткое множество $\tilde{B}$ "*большое действительное число*" имеет пустое ядро.

Не трудно заметить, что если произвольное нечеткое множество не является нормальным, то ядро такого нечеткого множества будет пустым. Таким образом, имеет место следующая фундаментальная *теорема*. Для того чтобы некоторое нечеткое множество было нормальным, необходимо и достаточно, чтобы оно имело непустое ядро.

Поскольку, как было показано выше, высота нечеткого множества всегда существует, то произвольное непустое нечеткое множество $\tilde{A}$ всегда можно преобразовать по меньшей мере к субнормальному нечеткому множеству $\tilde{A}'$ по следующей формуле:

$$\mu_{\tilde{A}'}(x) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{h_{\tilde{A}}}. \quad (2.2)$$

Более того, если в исходном нечетком множестве $\tilde{A}$ найдется хотя бы один элемент $x \in \tilde{A}$, для которого значение функции принадлежности равно высоте этого нечеткого множества, т. е. $\mu_{\tilde{A}}(x) = h_{\tilde{A}}$ то полученное после преобразования (2.2) нечеткое множество $\tilde{A}'$ будет нормальным.

Определение 2.6. **Границами нечеткого множества** называются такие элементы универсума, для которых значения функции принадлежности отличны от 0 и 1. Другими словами, границы нечеткого множества $\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\}$ включают те и только те элементы универсума $x \in X$, для которых выполняется условие: $0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1$.

Определение 2.7. Элементы нечеткого множества $y \in \tilde{A}$, для которых выполняется условие: $\mu_{\tilde{A}}(y) = 0.5$, называются **точками перехода** этого нечеткого множества $\tilde{A}$.

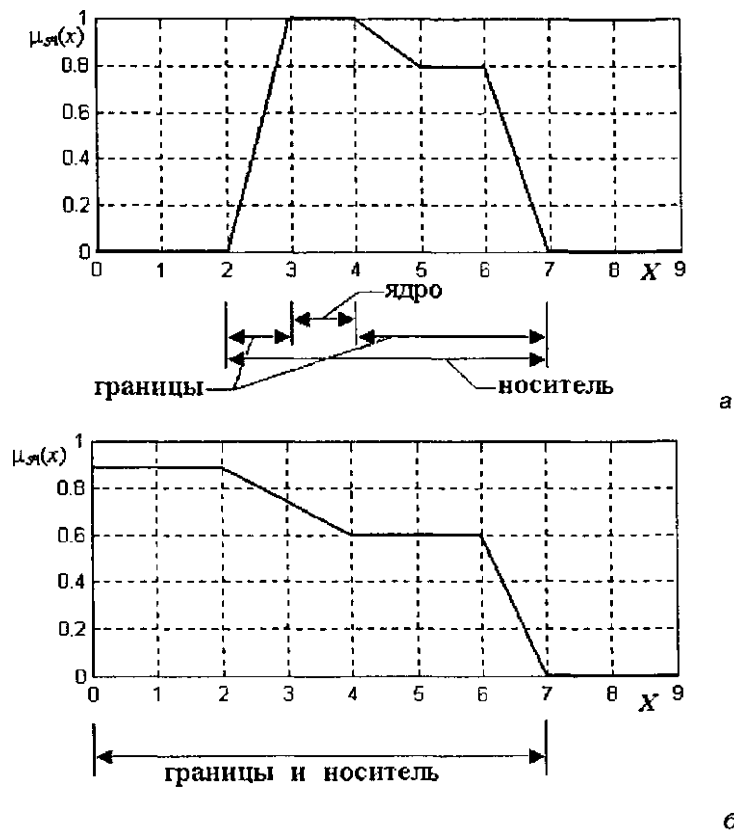


Рис. 2.2. Ядро, носитель и границы нечетких множеств, одно из которых является нормальным (а), а другое — не является нормальным (б)

Определение 2.8. Часто оказывается полезным понятие четкого множества A , *ближайшего* к нечеткому множеству $\tilde{A}$. Характеристическая функция такого множества может быть определена следующим выражением:

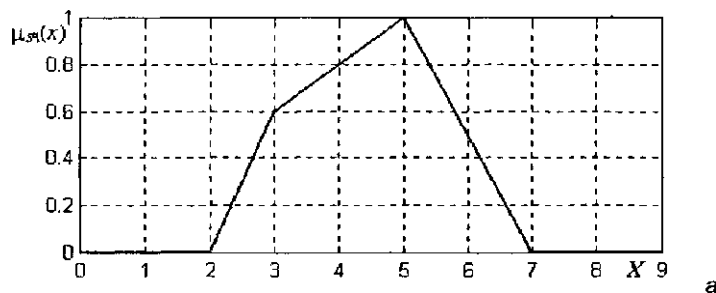
$$\chi_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) < 0.5 \\ 1, & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) > 0.5 \\ 0 \text{ или } 1, & \text{если } \mu_{\tilde{A}}(x) = 0.5 \end{cases}. \quad (2.3)$$

Для характеристики нечетких множеств используют также понятие выпуклости, которое ассоциируется с соответствующим графическим изображением функции принадлежности.

Определение 2.9. Нечеткое множество $\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\}$ с универсумом X называют *выпуклым*, если его функция принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \min \{\mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{A}}(b)\} \quad (2.4)$$

для любых значений $x, a, b \in X$, при которых $a < x < b$ и $a \neq b$.



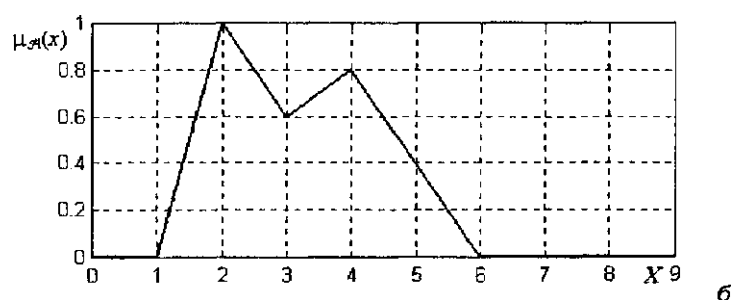


Рис. 2.3. Графики функций принадлежности выпуклого (а) и невыпуклого (б) нечеткого множества

Примечание

Определение выпуклости для нечетких множеств отличается от известного в анализе, поскольку имеет более общий математический контекст. Тем не менее, его весьма удобно использовать на практике, поскольку кроме непрерывных функций принадлежности оно применимо к конечным нечетким множествам, а также ко множествам, функция принадлежности которых не является непрерывной кривой.

На рис. 2.3 изображены графики двух функций принадлежности, первая из которых является выпуклой, а вторая — не является выпуклой.

Литература:

1. Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. — СПб.: БХВ Петербург, 2005. — 736 с.: ил.