Лекция 4
Операции над нечеткими множествами

Прежде чем приступить к рассмотрению операций над нечеткими множествами следует привести некоторые важные соображения, которые необходимо принимать во внимание при определении нечетких аналогов обычных теоретико-множественных понятий.

Во-первых, следует иметь в виду, что то или иное нечеткое множество является обобщением классического множества. Поскольку в общем случае можно предложить самые различные варианты подобного обобщения, это приводит к принципиальной неоднозначности тех или иных определений, имеющих аналогию в классической теории множеств и представляющих практический интерес. Применительно к операциям над нечеткими множествами это означает, что любое определение той или иной операции должно быть справедливым в том частном случае, когда вместо нечетких множеств используются обычные множества. Другими словами, подобные определения должны превращаться в известные определения теоретико-множественных операций, если участвующие в них функции принадлежности заменить характеристическими функциями множеств.

Во-вторых, если при рассмотрении классических множеств понятие универсума можно мыслить в форме "все что угодно", то сравнение нечетких множеств и выполнение над ними различных операций становится возможным, только когда соответствующие нечеткие множества определены на одном и том же универсуме.

Наконец, в-третьих, поскольку каждое нечеткое множество вполне определяется своей функцией принадлежности, последнее понятие зачастую используется как синоним нечеткого множества. При этом следует помнить, что в общем случае одна и та же функция принадлежности может описывать качественно различные нечеткие множества. С другой стороны, хотя одно и то же нечеткое множество или точнее— то или иное свойство в форме нечеткого множества, может быть представлено различными функциями принадлежности, отражающими неоднозначность субъективных или иных представлений, с формальной точки зрения все из них следует различать и говорить о различных нечетких множествах.

Поэтому, говоря о соответствии нечетких множеств и функций принадлежности, мы будем понимать это соответствие в форме математического изоморфизма.

Именно наличие подобного изоморфизма нечетких множеств, заданных одной и той же функцией принадлежности, позволяет рассматривать формальные определения на требуемом уровне строгости.

4.1 Равенство и доминирование нечетких множеств

По аналогии с обычными множествами, прежде всего, определим два простейших обычных отношения, которые могут иметь место между двумя произвольными нечеткими множествами $\tilde{A}$ и $\tilde{\boldsymbol{B}}$, заданными на одном и том же универсуме X. Первое из них — равенство двух нечетких множеств.

Равенство нечетких множеств. Два нечетких множества $\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\}$ и $\tilde{B} = \{x, \mu_{\tilde{B}}(x)\}$ считаются ***равными***, если их функции принадлежности принимают равные значения на всем универсуме X:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x) \text{ для любого } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \tag{4.1}$$

Равенство множеств в данном случае записывается как $\tilde{\boldsymbol{A}} = \tilde{\boldsymbol{B}}$.

Следующим простейшим отношением является понятие нечеткого подмножества (или нечеткого доминирования) произвольных нечетких множеств. Формально это определение также записывается с помощью соответствующих функций принадлежности.

Нечеткое подмножество. Нечеткое множество $\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\}$ является ***нечетким подмножеством*** нечеткого множества $\tilde{B} = \{x, \mu_{\tilde{B}}(x)\}$ (записывается как и $\tilde{\boldsymbol{A}} \subseteq \tilde{\boldsymbol{B}}$) тогда и только

тогда, когда значения функции принадлежности первого не превосходят соответствующих значений функции принадлежности второго, т. е. выполняется следующее условие:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \qquad (\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}). \tag{4.2}$$

Так же как и для обычных множеств, для обозначения нечеткого подмножества используется символ "⊆". При этом в случае $\widetilde{\boldsymbol{A}} \subseteq \widetilde{\boldsymbol{B}}$ говорят, что нечеткое множество $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ ***доминирует*** нечеткое множество $\widetilde{\boldsymbol{A}}$***,*** а нечеткое множество $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ ***содержится*** в нечетком множестве $\widetilde{\boldsymbol{B}}$.

По аналогии с классическими множествами среди нечетких множеств можно различать два различных варианта доминирования. Рассмотренное выше определение характерно для так называемого несобственного подмножества, когда не исключается случай возможного равенства двух нечетких множеств $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{B}}$. Если же в определении нечеткого подмножества исключается равенство соответствующих нечетких множеств в форме (4.1), то в этом случае $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ называется ***собственным*** нечетким подмножеством $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ и обозначается: $\widetilde{\boldsymbol{A}} \subset \widetilde{\boldsymbol{B}}$. При этом часто говорят, что нечеткое множество $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ ***строго*** доминирует нечеткое множество $\widetilde{\boldsymbol{A}}$, а нечеткое множество $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ ***строго*** содержится в нечетком множестве $\widetilde{\boldsymbol{B}}$.

Если для двух нечетких множеств $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{B}}$, заданных на одном универсуме, не выполняется ни отношение $\widetilde{\boldsymbol{A}} \subseteq \widetilde{\boldsymbol{B}}$, ни отношение $\widetilde{\boldsymbol{B}} \subseteq \widetilde{\boldsymbol{A}}$, то в этом случае говорят, что нечеткие множества $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ ***несравнимые.***

4.2. Операции пересечения, объединения и разности нечетких множеств

Пусть $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{B}}$— произвольные (конечные или бесконечные) нечеткие множества, заданные на одном и том же универсуме X.

Пересечение. ***Пересечением*** двух нечетких множеств $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ будем называть некоторое третье нечеткое множество $\tilde{C}$, заданное на этом же универсуме X, функция принадлежности которого определяется по следующей формуле:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \qquad (\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}) \tag{4.3}$$

Операция пересечения нечетких множеств по аналогии с обычными множествами обозначается знаком "∩". В этом случае результат операции пересечения двух нечетких множеств записывается в виде: $\widetilde{\boldsymbol{C}} = \widetilde{\boldsymbol{A}} \cap \widetilde{\boldsymbol{B}}$.

В этом случае $\tilde{C} = \{x, \mu_{\tilde{C}}(x)\}\}$ — нечеткое множество с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{C}}(x)$ которая определяется по формуле (4.3). Как нетрудно заметить, пересечение $\widetilde{\boldsymbol{A}} \cap \widetilde{\boldsymbol{B}}$ есть наибольшее нечеткое подмножество $\widetilde{\boldsymbol{C}}$, которое содержится одновременно в нечетких множествах $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{B}}$.

Операцию пересечения нечетких множеств в смысле (4.3) иногда называют min-пересечением или ∧-пересечением. Последнее обозначение связано с определением логической операции "И", которая в математической логике обозначается знаком "∧". Соответственно функция принадлежности пересечения $\mu_{\tilde{C}}(x)$ в этом случае записывается в виде: $\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)$ $(\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X})$. При этом знак "∧" используется в качестве синонима операции нахождения минимального значения. Поскольку в практике нечеткого моделирования эта операция используется наиболее часто, в дальнейшем, говоря о пересечении нечетких множеств, если явно не указано другое, мы будем иметь в виду min-пересечение (∧-пересечение).

В качестве примера рассмотрим конечное нечеткое множество $\widetilde{\boldsymbol{A}}$, которое представляет в некотором контексте свойство "*небольшое натуральное число*", и равно: $\widetilde{\boldsymbol{A}}$={<1, 1.0>, <2, 1.0>, <3, 0.9>, <4, 0.8>, <5, 0.6>, <6, 0.5>, <7, 0.4>, <8, 0.2>, <9, 0.1>}, и конечное нечеткое множество $\widetilde{\boldsymbol{B}}$, которое представляет свойство "*натуральное число, приближенно равное двум*", и равно: $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ ={<1, 0.5>, <2, 1.0>, <3, 0.6>, <4, 0.4>, <5, 0.2>,<6, 0>,<7, 0>,<8, 0>, <9, 0>}. Тогда нечеткое множество $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ как результат операции пересечения $\widetilde{\boldsymbol{C}} = \widetilde{\boldsymbol{A}} \cap \widetilde{\boldsymbol{B}}$ будет равно: $\widetilde{\boldsymbol{C}}$={<1, 0.5>, <2, 1.0>, <3, 0.6>, <4, 0.4>, <5, 0.2>, <6, 0>, <7, 0>, <8, 0>, <9, 0>}. Содержа-

тельно нечеткое множество $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ может представлять в этом же контексте "*небольшое натуральное число, приближенно равное двум*".

Результат операции пересечения двух и большего числа нечетких множеств, заданных на одном и том же универсуме *X*, также можно изобразить графически в декартовой системе координат на плоскости. Этот способ особенно удобен для визуализации операций с бесконечными нечеткими множествами. В данном случае каждое из нечетких множеств изображается соответствующей функцией принадлежности, а функция принадлежности результата операции пересечения изображается утолщенной линией. Для дополнительной наглядности область, расположенная ниже значений результирующей функции принадлежности, изображается затемненной.

Для случая пересечения двух нечетких множеств $\widetilde{\boldsymbol{A}} \cap \widetilde{\boldsymbol{B}}$, заданных различными функциями принадлежности, результат операции изображен на рис. 4.1, *а*, *б*. При этом линейные Z-образная и S-образная функции принадлежности имеют параметры *a*=3, *b*=6, а П-образные функции принадлежности — *a*=1, *b*=3, *c*=4, *d*=71 и *a*=3, *b*=6, *c*=7, *d*=9 соответственно.

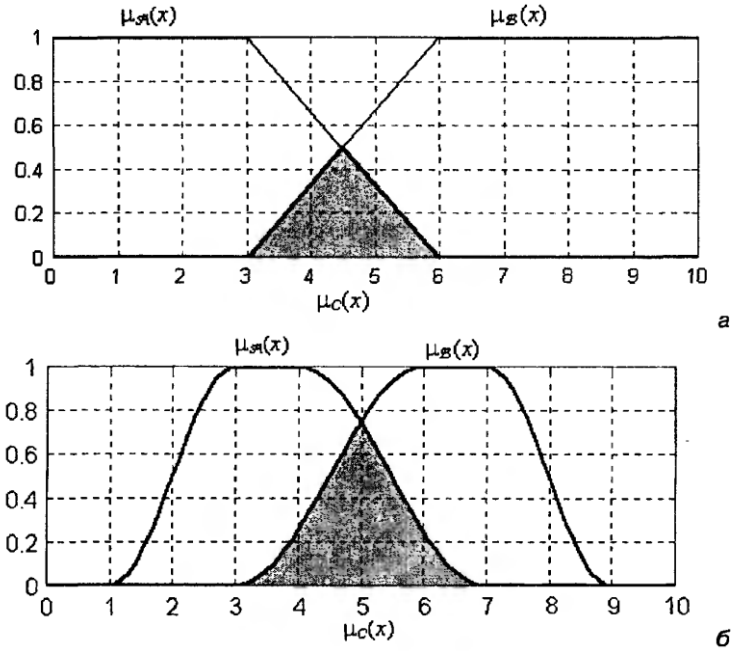


Рис 4.1. Графическое представление операции пересечения двух нечетких множеств $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{B}}$, заданных линейными Z-образной и S-образной функциями принадлежности (а) и *П*-образными (б) функциями принадлежности

Объединение. ***Объединением*** двух нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется некоторое третье нечеткое множество $\widetilde{D}$, заданное на этом же универсуме *X*, функция принадлежности которого определяется по следующей формуле:

$$\mu_{\widetilde{D}}(x) = \max\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\right) \qquad (\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}). \tag{4.4}$$

Операция объединения нечетких множеств по аналогии с обычными множествами обозначается знаком "∪". В этом случае результат операции объединения двух нечетких множеств записывается в виде: $\widetilde{D} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$.

Операцию объединения нечетких множеств в смысле (4.4) иногда называют max-объединением или ∨-объединением. Последнее обозначение связано с определением логической операции "ИЛИ" (неисключающего ИЛИ), которая в математической логике обозначается знаком " ∨". Соответственно функция принадлежности объединения $\mu_{\widetilde{D}}(x)$ в этом случае часто записывается в виде: $\mu_{\widetilde{D}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x)$. При этом знак " ∨" используется в качестве синонима операции максимума. Поскольку в практике нечеткого моделирования эта операция используется наиболее часто, в дальнейшем, говоря об объединении нечетких мно-

жеств, если явно не указано другое, мы будем иметь в виду их max-объединение (∨-объединение).

В качестве примера рассмотрим нечеткое множество $\tilde{A}$, которое, как и выше, представляет в некотором контексте "*небольшое натуральное число*", и равно: $\tilde{A}$ ={<1, 1.0>, <2, 1.0>, <3, 0.9>, <4, 0.8>, <5, 0.6>, <6, 0.5>, <7, 0.4>, <8, 0.2>, <9, 0.1>}, и нечеткое множество $\tilde{B}$, которое представляет "*натуральное число, приближенно равное двум*", и равно: $\tilde{B}$ ={<1, 0.5>, <2, 1.0>, <3, 0.6>, <4, 0.4>, <5, 0.2>, <6, 0>, <7, 0>, <8, 0>, <9, 0>}. Тогда нечеткое множество $\tilde{D}$ как результат операции объединения $\tilde{D}=\tilde{A} \cup \tilde{B}$ будет равно: $\tilde{D}$ ={<1, 1.0>, <2, 1.0>,<3, 0.9>, <4, 0.8>, <5, 0.6> <6, 0.5>, <7, 0.4>, <8, 0.2>, <9, 0.1>}. Содержательно нечеткое множество $\tilde{D}$ может представлять в этом же контексте "*небольшое натуральное число или натуральное число, приближенно равное двум*".

Результат операции объединения двух и большего числа нечетких множеств, заданных на одном и том же универсуме *X*, можно изобразить графически в декартовой системе координат на плоскости. Для случая объединения двух нечетких множеств $\tilde{A} \cup \tilde{B}$, заданных различными функциями принадлежности, результат операции изображен на рис. 4.2, *а, б*.

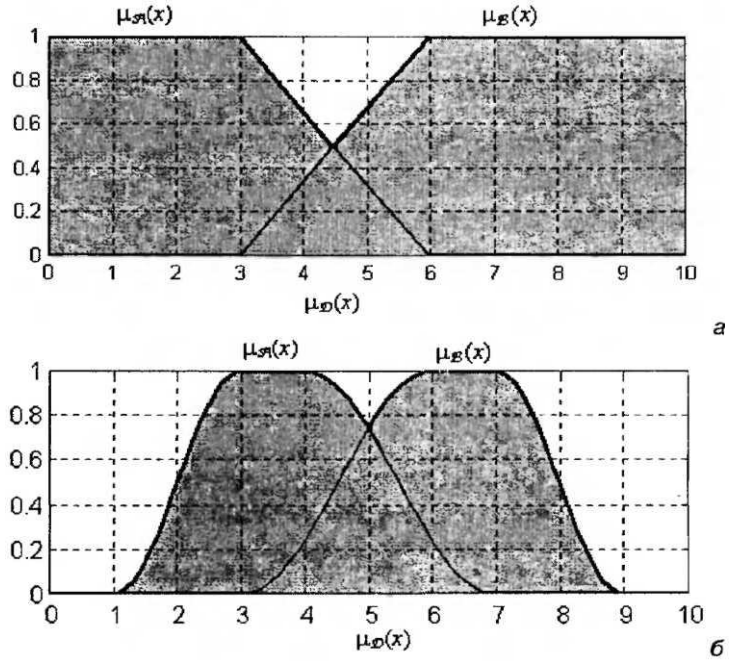


Рис. 4.2. Графическое представление операции объединения двух нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, заданных линейными *Z*-образной и *S*-образной функциями принадлежности (а) и *П*-образными (б) функциями принадлежности

Разность. ***Разностью*** двух нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется некоторое третье нечеткое множество $\tilde{E}$, заданное на этом же универсуме *X*, функция принадлежности которого определяется по следующей формуле:

$$\mu_{\tilde{E}}(x) = \max\left((\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x)),0\right) \qquad (\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}), \tag{4.5}$$

где под знаком максимума используется обычная операция арифметической разности двух чисел. Операция разности двух нечетких множеств по аналогии с обычными множествами обозначается знаком "\". В этом случае результат операции разности двух нечетких множеств можно записать в виде: $\tilde{E} = \tilde{A} \backslash \tilde{B}$.

Так, если, как и выше, рассмотреть нечеткое множество $\tilde{A}$, равное: $\tilde{A}$ ={<1, 1.0>, <2, 1.0>, <3, 0.9>, <4, 0.8>, <5, 0.6>, <6, 0.5>, <7, 0.4>, <8, 0.2>, <9, 0.1>}, и нечеткое множество $\tilde{B}$, равное: $\tilde{B}$ ={<1, 0.5>, <2, 1.0>, <3, 0.6>, <4, 0.4>, <5, 0.2>, <6, 0>, <7, 0>, <8, 0>, <9, 0>}, то разность $\tilde{A} \backslash \tilde{B}$ будет равна: $\tilde{A} \backslash \tilde{B}$={<1, 0.5>, <2, 0>, <3, 0.3>, <4, 0.4>, <5, 0.4>, <6, 0.5>, <7, 0.4>, <8, 0.2>, <9, 0.1>}. Содержательно нечеткое множество $\tilde{A} \backslash \tilde{B}$ может представлять в том

же контексте "*небольшое натуральное число, не являющееся приближенно равным двум*". Для этих двух нечетких множеств разность $\tilde{B}\backslash\tilde{A}$ будет равна пустому множеству, поскольку все значения функции принадлежности результата будут равны нулю. Содержательно нечеткое множество $\tilde{B}\backslash\tilde{A}$ может представлять в том же контексте "*натуральное число, приближенно равное двум и не являющееся небольшим*".

Результат операции разности двух нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, заданных на одном и том же универсуме X различными функциями принадлежности, изображен на рис. 4.3, *а, б*.

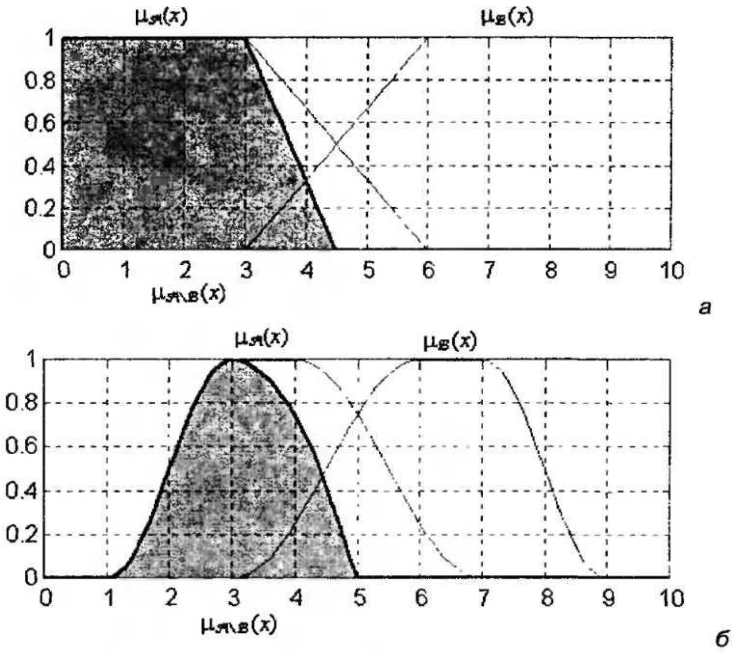


Рис. 4.3. Графическое представление операции разности двух нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, заданных линейными Z-образной и S-образной функциями принадлежности (а) и Π-образными (б) функциями принадлежности

Симметрическая разность. Следует заметить, что операция разности двух нечетких множеств в отличие от операций ∨-объединения и ∧-пересечения не является коммутативной. По аналогии с обычными множествами иногда оказывается полезной операция симметрической разности двух нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ (будем обозначать ее через $\tilde{A} \ominus \tilde{B}$). По определению:

$$\mu_{\tilde{A}\ominus\tilde{B}}(x) = |\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x)| \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}, \tag{4.6}$$

где в правой части выражения применяется операция модуля (или вычисления абсолютного значения) числа. При этом оказывается справедливым следующее утверждение: $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (\tilde{A} \backslash \tilde{B}) \cup (\tilde{B}\backslash\tilde{A})$, т. е. симметрическая разность двух нечетких множеств представляет собой объединение двух разностей нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$.

Если, как и выше, рассмотреть нечеткое множество $\tilde{A}$, равное: $\tilde{A}$ ={<1, 1.0>, <2, 1.0>, <3. 0.9>, <4, 0.8>, <5, 0.6>, <6, 0.5>, <7, 0.4>, <8, 0.2>, <9, 0.1>}, и нечеткое множество $\tilde{B}$, равное: $\tilde{B}$ ={<1, 0.5>, <2, 1.0>, <3, 0.6>, <4, 0.4>, <5, 0.2>, <6, 0>, <7, 0>, <8, 0>, <9, 0>}, то их симметрическая разность $\tilde{A} \ominus \tilde{B}$ будет равна: $\tilde{A} \ominus \tilde{B}$={<1, 0.5>, <2, 0>, <3, 0.3>, <4, 0.4>, <5, 0.4>, <6, 0.5>, <7, 0.4>, <8, 0.2>, <9, 0.1>}. В данном случае результат совпадает с обычной разностью $\tilde{A}\backslash\tilde{B}$.

Операция симметрической разности двух нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, заданных на одном и том же универсуме X различными функциями принадлежности, может быть проиллюстрирована графически (рис. 4.4). При этом результату операции симметрической разности нечетких множеств также соответствует более темная область на графике.

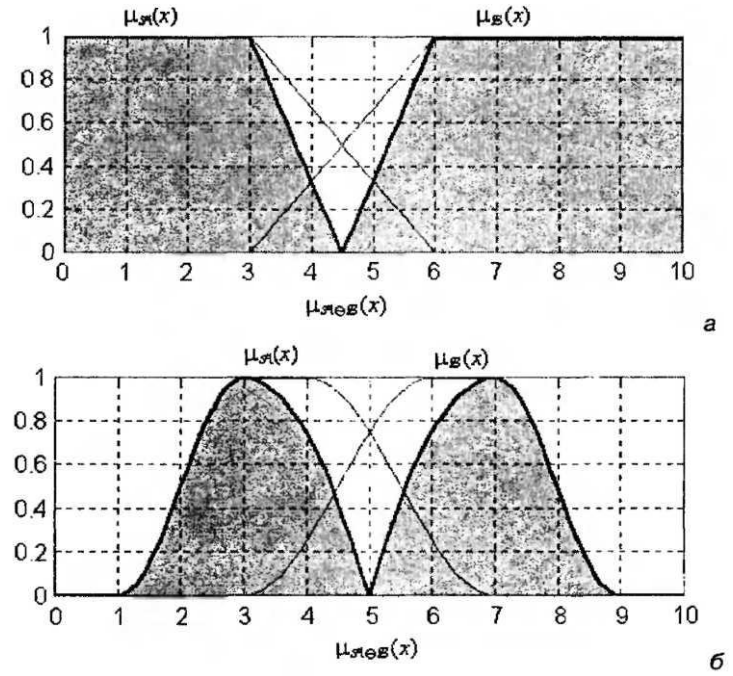


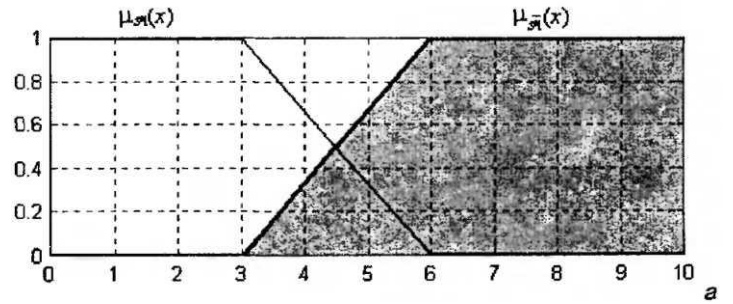
Рис. 4.4. Графическое представление операции симметрической разности двух нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, заданных линейными *Z*-образной и *S*-образной функциями принадлежности (а) и П-образными (б) функциями принадлежности

Дополнение. Специально следует остановиться на унарной операции ***дополнения*** нечеткого множества. Дополнение нечеткого множества $\tilde{A}$ обозначается через $\overline{\boldsymbol{A}}$ и определяется как нечеткое множество $\tilde{A}$ ={$x|\mu_{\overline{\boldsymbol{A}}}(x)$ }, функция принадлежности которого $\mu_{\overline{\boldsymbol{A}}}(x)$ определяется по следующей формуле:

$$\mu_{\overline{\boldsymbol{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \quad (\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}). \tag{3.7}$$

Если, как и выше, рассмотреть нечеткое множество $\tilde{A}$, равное: $\tilde{A}$ ={<1, 1.0>, <2, 1.0>, <3, 0.9>, <4, 0.8>, <5, 0.6>, <6, 0.5>, <7, 0.4>, <8, 0.2>, <9, 0.1>}, и нечеткое множество $\tilde{B}$, равное: $\tilde{B}$ ={<1, 0.5>, <2, 1.0>, <3, 0.6>, <4, 0.4>, <5, 0.2>, <6, 0>, <7, 0>, <8, 0>, <9, 0>}, то их дополнения будут равны: $\overline{\boldsymbol{A}}$={<1, 0>, <2, 0>, <3, 0.1>, <4, 0.2>, <5, 0.4>, <6, 0.5>, <7, 0.6>, <8, 0.8>, <9, 0.9>} и $\overline{\boldsymbol{B}}$={<1, 0.5>, <2, 0>, <3, 0.4>, <4, 0.6>, <5, 0.8>, <6, 1.0>, <7, 1.0>, <8, 1.0>, <9, 1.0>}. Содержательно нечеткое множество $\overline{\boldsymbol{A}}$ может представлять в рассматриваемом контексте "*натуральное число, не являющееся небольшим*", а нечеткое множество $\overline{\boldsymbol{B}}$ — "*натуральное число, не равное приближенно двум*".

Операция дополнения нечеткого множества $\tilde{A}$ может быть проиллюстрирована графически (рис. 4.5). Как нетрудно видеть, график функции принадлежности дополнения нечеткого множества симметричен графику функции принадлежности исходного нечеткого множества относительно линии: *y*=0.5.



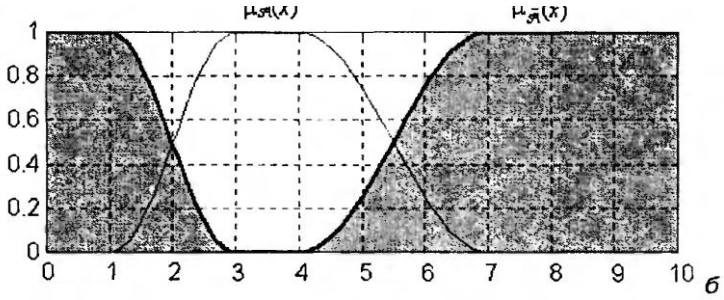


Рис. 4.5. Графическое представление операции дополнения нечеткого множества $\tilde{A}$, которое задано линейной *Z*-образной (а) функцией принадлежности и *П*-образной (б) функцией принадлежности

Особенность рассматриваемых операций над нечеткими множествами состоит в том, что для них не выполняются закон *исключенного третьего* и закон *тождества* (свойства дополняемости операций пересечения и объединения). А именно, в общем случае оказываются справедливыми неравенства:

$$\tilde{A} \cap \overline{\boldsymbol{A}} \neq \emptyset; \quad (3.17)$$

$$\tilde{A} \cup \overline{\boldsymbol{A}} \neq X. \quad (3.18)$$

4.3 Нечеткие операторы

Введенные в рассмотрение нечеткие теоретико-множественные операции не исчерпывают все возможные способы их задания, которые потенциально можно предложить в контексте общей теории нечетких множеств. Большой класс подобных операций, включая и уже рассмотренные операции пересечения и объединения нечетких множеств, допускает обобщенное представление на основе так называемых *нечетких операторов*. Эти операторы действуют на множествах значений функций принадлежности (в нашем случае— на интервалах [0, 1]) и поэтому могут быть непосредственно применены к функциям принадлежности произвольных нечетких множеств. Из многообразия нечетких операторов наибольший интерес представляют треугольные норма и конорма.

Определение 4.1. Произвольная действительная функция от 2-х переменных T:[0,1]x[0,1]→[0,1] называется ***треугольной нормой***, если она удовлетворяет следующим свойствам, называемым аксиомами треугольной нормы:

$T(x, 0) = 0; \quad T(x, 1) = x$ (ограниченность); (3.19)

$T(x, y) = T(y, x)$ (коммутативность); (3.20)

$T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ (ассоциативность); (3.21)

$T(x, y) \leq T(z_1, z_2)$, (монотонность), (3.22)

если одновременно $x \leq z_1$ и $y \leq z_2$.

Аксиома ограниченности обеспечивает выполнение граничных условий, которые должны выполняться для всех операций пересечения нечетких множеств, включая и обычные множества. Аксиомы коммутативности и ассоциативности обеспечивают выполнение соответствующих свойств у всех операций пересечения нечетких множеств. Аксиома монотонности гарантирует неизменность порядка величин значений функций принадлежности от каких бы то ни было значений других функций принадлежности. Типичной треугольной нормой является операция ∧-пересечения нечетких множеств.

Определение 4.2 (Т-конорма, s-норма). Произвольная действительная функция от 2-х переменных S : [0,1]x[0,1] → [0,1] называется ***треугольной конормой***, если она удовлетворяет следующим свойствам, называемым аксиомами треугольной конормы:

$S(x,0)=x; \quad S(x, 1)=1$ (ограниченность); (3.23)

$S(x, y) = S(y, x)$ (коммутативность); (3.24)

$S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$ (ассоциативность); (3.25)

$$S(x, y) < S(z_1, z_2), \qquad \text{(монотонность)}, \qquad (3.26)$$

если одновременно $x \le z_1$ и $y \le z_2$.

Как можно видеть, аксиоматика этих двух норм практически одинакова, кроме первой аксиомы ограниченности конормы. Эта аксиома обеспечивает выполнение граничных условий, которые должны выполняться для всех операций объединения нечетких множеств, включая и обычные множества. Типичной треугольной конормой является операция шах-объединения нечетких множеств.

Поскольку областью определения и областью значений треугольных норм и конорм является интервал [0, 1], то все рассмотренные ранее операции над нечеткими множествами могут быть проиллюстрированы графически с использованием так называемого трехмерного единичного куба. При этом результатам операций ∧-пересечения нечетких множеств соответствует более темная область на графике (рис. 4.6). Аналогично на рис. 4.7 представлены операции ∨-объединения нечетких множеств в трехмерном пространстве.

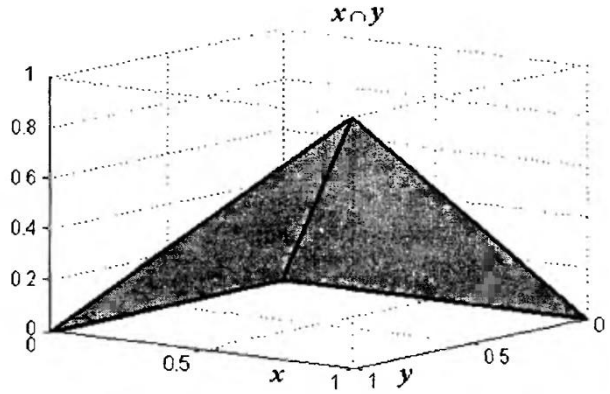


Рис. 4.6. Графическое представление операций ∧-пересечения нечетких множеств в трехмерном пространстве

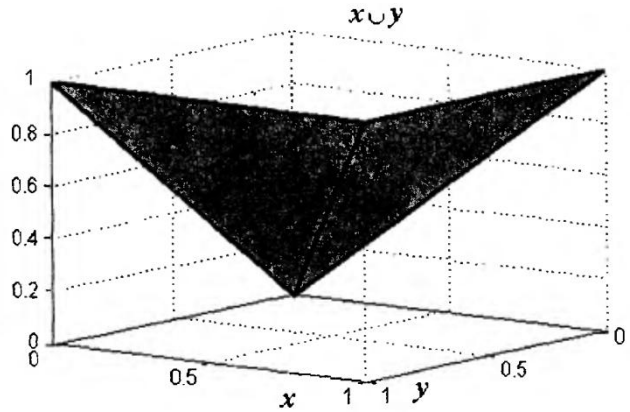


Рис. 4.7. Графическое представление операций ∨-объединения нечетких множеств в трехмерном пространстве

Литература:

Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. — СПб.: БХВ Петербург, 2005. — 736 с.: ил.