Лекция 6

Нечеткая и лингвистическая переменные. Нечеткие величины, числа и интервалы

Рассмотренное раньше понятие нечеткого множества допускает различные уточнения, которые целесообразно использовать для более адекватного отражения семантики неопределенности при построении нечетких моделей сложных систем. Одним из таких уточнений является понятие лингвистической переменной, которое широко используется в нечетком управлении для представления входных и выходных переменных управляемой системы. В этой лекции также будут рассмотрены нечеткие аналоги обычных чисел и интервалов, которые оказываются весьма удобным средством для численных расчетов значений соответствующих функции принадлежности при выполнении арифметических операций.

6.1. Определения нечеткой и лингвистической переменных

Определение 6.1. *Нечеткая переменная* определяется как кортеж: < *a*, *X*, *A*>, где *a*— наименование или название нечеткой переменной; *X*— область ее определения (универсум); $\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\}$ — нечеткое множество на *X*, описывающее возможные значения, которые может принимать нечеткая переменная *a*. Таким образом, говоря о нечеткой переменной а, мы всегда будем иметь в виду некоторое нечеткое множество *A*, которое определяет ее возможные значения.

В качестве примера нечеткой переменной можно нечеткое множество *B*, которое характеризует *"горячий кофе"*. В этом случае соответствующая нечеткая переменная может быть представлена следующим образом: <*Горячий кофе, {x* | 0°C < x < 100°C}, *B*>, где $\tilde{B} = \{x, \mu_{\tilde{B}}(x)\}$ — нечеткое множество с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{B}}(x)$, которая может быть задана, в частности, графически (рис. 1.4, *а* или рис. 1.4, *б).*

Обобщением нечеткой переменной является так называемая лингвистическая переменная.

Определение 6.2. *Лингвистическая переменная* также определяется как кортеж: <β, *T, X, G, M*>, где:

- β — наименование или название лингвистической переменной;
- *T* — базовое *терм-множество* лингвистической переменной или множество ее значений *(термов),* каждое из которых представляет собой наименование отдельной нечеткой переменной α;
- *X*— область определения (универсум) нечетких переменных, которые входят в определение лингвистической переменной β;
- *G* — некоторая синтаксическая процедура, которая описывает процесс образования или генерирования из множества *T* новых, осмысленных в рассматриваемом контексте значений для данной лингвистической переменной;
- *M*— семантическая процедура, которая позволяет поставить в соответствие каждому новому значению данной лингвистической переменной, получаемому с помощью процедуры *G*, некоторое осмысленное содержание посредством формирования соответствующего нечеткого множества.

Пример 6.1. В качестве примера рассмотрим ситуацию со скоростью движения автомобильного транспорта в пределах городской черты. Хотя правила дорожного движения регламентируют величину этой скорости, однако многие автолюбители предпочитают давать собственную субъективную оценку своей скорости движения. При этом используются такие определения, как "малая скорость", "средняя скорость" и "высокая скорость" движения. Очевидно, что подобная практическая оценка скорости может относиться к диапазону скоростей в пределах интервала от 0 км/ч до некоторой величины, определяемой личными предпочтениями того или иного водителя. Пусть в нашем примере из соображений удобства это будет величина 100 км/ч.

Формализация субъективной оценки скорости движения может быть выполнена с помощью следующей лингвистической переменной $< \beta_1, T, X, G, M >$, где

- β_1 — скорость движения автомобиля;
- T = *{"малая скорость", "средняя скорость", "высокая скорость"*};
- X = [0,100];
- G — процедура образования новых термов с помощью связок логических связок "И", "ИЛИ" и модификаторов типа "очень", "НЕ", "слегка" и др. Например: "малая или средняя скорость", "очень высокая скорость" и др.;
- M — процедура задания на X = [0,100] нечетких переменных α_1 = *"малая скорость"*, α_2 =*"средняя скорость"*, α_3 = *"высокая скорость"*, а также соответствующих нечетких множеств для термов из $G(T)$ в соответствии с правилами трансляции нечетких связок и модификаторов "И", "ИЛИ", "НЕ", "очень", "слегка".

Примечание: Конкретные процедуры G и M будут рассмотрены нами далее в *след лекции,* посвященной изложению основ нечеткой логики. Применительно к данному конкретному примеру можно ограничиться предположением об их тривиальном характере, т. е. никаких логических связок и модификаторов мы не будем использовать.

Для рассматриваемого примера нечеткие множества A_1, A_2, A_3, соответствующие нечетким переменным: α_1 = *"малая скорость"*, α_2 = *"средняя скорость"*, α_3 = *"высокая скорость"*, удобно задать графически с помощью кусочно-линейных функций принадлежности. Один из возможных конкретных вариантов этих нечетких множеств изображен на рис. 6.1.

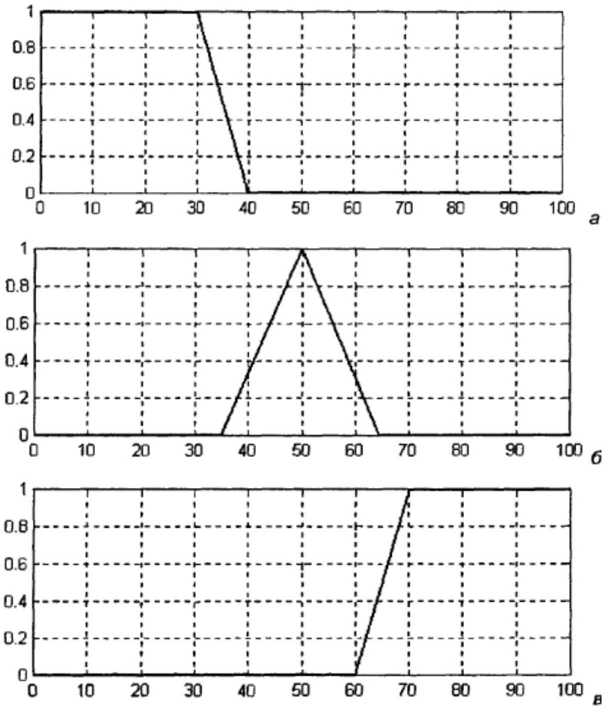


Рис. 6.1. Графики функций принадлежности нечетких множеств A_1,A_2, A_3, соответствующих нечетким переменным α_1 = *"малая скорость" (а),* α_2 = *"средняя скорость"* (б), α_3 = *"высокая скорость"* (в) для лингвистической переменной β_1 (скорость движения автомобиля)

Иногда для наглядности графики функций принадлежности нескольких нечетких переменных, используемых для задания одной лингвистической переменной, изображают на одном рисунке. Применительно к примеру 6.1 все три графика представлены на рис. 6.2, что позволяет сравнивать значения функций принадлежности соответствующих нечетких переменных для различных значений универсума.

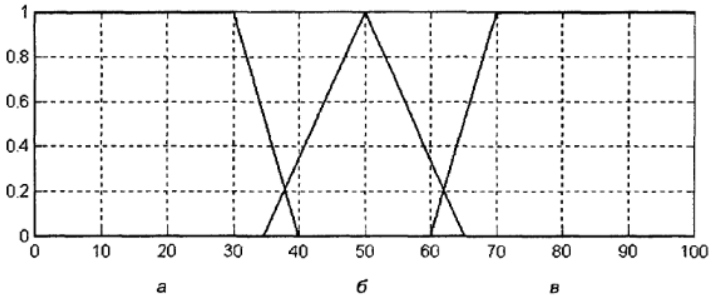


Рис. 6.2. Графики функций принадлежности нечетких множеств A_1,A_2, A_3, изображенные на одном рисунке

<u>Примечание:</u> Наряду с рассмотренными выше базовыми значениями лингвистической переменной "скорость движения автомобиля" *(T={"малая скорость", "средняя скорость", "высокая скорость"})* возможны и другие значения этой же лингвистической переменной, зависящие от конкретной величины скорости движения. Например, могут быть определены такие дополнительные значения лингвистической переменной *"скорость движения автомобиля",* как "около 30 км/ч", "около 50 км/ч", "около 70 км/ч". Как будет видно из дальнейшего изложения, эти значения лингвистической переменной удобно моделировать с помощью нечетких чисел.

6.2. Нечеткие величины, числа и интервалы

Процесс нечеткого моделирования основывается на количественном представлении входных и выходных переменных системы в форме нечетких множеств. Такое представление связано с рассмотрением специальных нечетких множеств, которые задаются на множестве действительных чисел и обладают некоторыми дополнительными свойствами. Наиболее общим понятием в этом контексте является понятие нечеткой величины.

Определение 6.3. *Нечеткой величиной* называется произвольное нечеткое множество $\tilde{B} = \{x, \mu_{\tilde{B}}(x)\}$, заданное на множестве действительных чисел R, т. е. для которого универсумом X служит все множество R. Другими словами, функция принадлежности нечеткой величины есть отображение $\mu_{\tilde{B}}(x)$:R→[0,1]. Если в качестве универсума взять подмножество неотрицательных действительных чисел R_+, то получим определение *неотрицательной нечеткой величины* B_+.

Примерами нечетких величин являются нечеткие множества, функции принадлежности которых изображены на рис. 3.1—3.8. Более того, все эти нечеткие величины являются неотрицательными. С другой стороны, рассмотренные в примерах 1.1 и 1.3 нечеткие множества не являются нечеткими величинами.

Наибольший интерес для нечеткого моделирования представляет конкретизация нечеткой величины в форме нечетких чисел и интервалов.

Определение 6.4. В общем случае *нечетким интервалом* называется нечеткая величина с выпуклой функцией принадлежности.

Примерами нечетких интервалов могут служить нечеткие множества с функциями принадлежности, изображенными на рис. 2.2, *а,* 2.3, *а* и 3.1, *б,* а также на рис. 3.2—3.6. С другой стороны, нечеткое множество с функцией принадлежности, изображенной на рис. 2.3, *б,* не является нечетким интервалом.

<u>Примечание:</u> В литературе нечеткий интервал иногда называют также *толерантным нечетким числом.*

Определение 6.5. В общем случае *нечеткий числом* называется такая нечеткая величина, функция принадлежности которой является выпуклой и унимодальной.

Примерами нечетких чисел могут служить нечеткие множества с функциями принадлежности, изображенными на рис. 2.3, *а,* 3.1, *а* и 3.8, *б.* С другой стороны, нечеткое множество с функцией принадлежности, изображенной на рис. 2.3, *б,* не является нечетким интервалом. Как видно из этих примеров, нечеткое число в общем случае является частным случаем нечеткого интервала, что полностью согласуется с обычными числами и интервалами на множестве действительных чисел.

Примечание: При общем определении нечеткого интервала и нечеткого числа не делается никаких предположений относительно нормальности соответствующих нечетких множеств. С другой стороны, функции принадлежности нечетких чисел и интервалов, вообще говоря, могут и не иметь аналитического представления. Все это затрудняет практическое использование этих общих понятий для решения конкретных задач нечеткого моделирования. По этой причине в дальнейшем рассматриваются некоторые способы уточнения данных понятий на основе использования типовых функций принадлежности.

Поскольку нечеткие числа и интервалы представляют собой нечеткие множества, то для них оказываются справедливыми все свойства и операции, определенные ранее для нечетких множеств. Это в полной мере относится к определению нормального нечеткого числа и нормального нечеткого интервала, носителя и ядра, а также свойств выпуклости и унимодальности нечетких чисел и нечетких интервалов, которые были использованы при их определении *(см. лекции 2 и 3).*

Дополнительно нечеткие числа могут характеризоваться следующими свойствами.

Определение 6.6. Нечеткое число называется *нечетким нулем,* если его модальное значение (мода) равно 0.

Определение 6.7. Нечеткое число называется *положительным* (или *отрицательным)* нечетким числом, если оно имеет строго положительный (соответственно, строго отрицательный) носитель.

Операции над нечеткими числами интервалами

Для нечетких чисел и интервалов в общем случае с использованием принципа обобщения (4.23) могут быть определены аналоги обычных арифметических операций. В этом случае расширенные бинарные арифметические операции (сложение, вычитание, умножение и деление) для нечетких чисел и интервалов определяются через соответствующие операции для обычных действительных чисел.

Пусть $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ - произвольные нечеткие числа (нечеткие интервалы) с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ и $\mu_{\tilde{B}}(x)$ соответственно.

Определение 6.8. Операция *сложения* нечетких чисел (интервалов) обозначается через $\tilde{A}+\tilde{B}=\tilde{C}=\{z,\mu_{\tilde{C}}(z)\}$, где функция принадлежности результата $\mu_{\tilde{C}}(z)$ определяется по формуле:

$$\mu_{\tilde{C}}(z)=\sup_{z=x+y}\{\min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\}\} \qquad (6.1)$$

Определение 6.9. Операция *вычитания* нечетких чисел (интервалов) обозначается через $\tilde{A}-\tilde{B}=\tilde{C}=\{z,\mu_{\tilde{C}}(z)\}$, где функция принадлежности результата $\mu_{\tilde{C}}(z)$ определяется по формуле:

$$\mu_{\tilde{C}}(z)=\sup_{z=x-y}\{\min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\}\} \qquad (6.2)$$

Определение 6.10. Операция *умножения* нечетких чисел (интервалов) обозначается через $\tilde{A}*\tilde{B}=\tilde{C}=\{z,\mu_{\tilde{C}}(z)\}$, где функция принадлежности результата $\mu_{\tilde{C}}(z)$ определяется по формуле:

$$\mu_{\tilde{C}}(z) = \sup_{z=x*y} \{\min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}\} \tag{6.3}$$

Определение 6.11. Операция *деления* нечетких чисел (интервалов) обозначается через $\widetilde{A} \div \tilde{B} = \tilde{C} = \{z, \mu_{\tilde{C}}(z)\}$, где функция принадлежности результата $\mu_{\tilde{C}}(z)$ определяется по формуле:

$$\mu_{\tilde{C}}(z) = \sup_{z=x\div y} \{\min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}\} \tag{6.4}$$

В выражениях (6.1)—(6.4) справа от знака равенства супремум берется по каждому из совокупности значений элементов универсума, которые в свою очередь являются результатом соответствующей обычной арифметической операции над численными значениями элементов универсума исходных нечетких чисел (интервалов).

Например, пусть задано нечеткое число — *"нечеткая единица",* которое описывается следующим конечным нечетким множеством: $\tilde{I}$={<0, 0.2>, <1, 1.0>, <2,0.2>}.

Рассмотрим выполнение нечеткой операции сложения— *"нечеткая единица"* плюс *"нечеткая единица"* с использованием формулы (6.1). Последовательно получим: $\tilde{I} + \tilde{I}$={<0, 0.2>, <l, 1.0>, <2, 0.2>}+{<0, 0.2>, <l, 1.0>, <2, 0.2>}={<0, min{0.2, 0.2}>, <l, max{min{0.2, 1.0}, min{1.0, 0.2}}>, <2, max{min{0.2, 0.2}, min{1.0, 1.0}, min{0.2, 0.2}}>, <3, max{min{1.0, 0.2}, min{0.2, 1.0}}>, <4, min{0.2, 0.2}>}={<0, 0.2>, <1, 0.2>, <2, 1.0>, <3, 0.2>, <4, 0.2>}.

Возможно, операция сложения нечетких чисел станет более понятной, если принять во внимание, что значения результата получаются как различные комбинации слагаемых обычной арифметической операции сложения: 0=0+0, 1=0+1=1+0, 2=0+2=1+1=2+0, 3=1+2=2+1, 4=2+2. Очевидно, что для конечных множеств вместо операции *супремум* можно использовать операцию *максимум.* Полученное в результате нечеткое число можно назвать *"нечеткая двойка".*

Аналогичным образом можно получить другое нечеткое число— *"нечеткий нуль",* как результат выполнения операции разности с использованием формулы (6.2). В этом случае получим: *"нечеткий нуль"* равен *"нечеткая единица"* минус *"нечеткая единица"* или $\tilde{I} - \tilde{I}$= ={<0, 0.2>, <1, 1.0>, <2, 0.2>} – {<0, 0.2>, <1, 1.0>, <2, 0.2>} = {<-2, min{0.2, 0.2}>, <-1, max{min{0.2, 1.0}, min{1.0, 0.2}}>, <0, max{min{0.2, 0.2}, min{1.0, 1.0}, min{0.2, 0.2}}>, <1, max{min{1.0, 0.2}, min{0.2, 1.0}}>, <2, min{0.2, 0.2}>} = {<-2, 0.2>, <-l, 0.2>, <0, 1.0>, <1,0.2>, <2, 0.2>}.

Иногда могут представлять интерес операции расширенного максимума и расширенного минимума нечетких чисел (интервалов), которые определяются следующим образом.

Определение 6.12. Операция *расширенного максимума* нечетких чисел (интервалов) обозначается через $\max(\tilde{A}, \tilde{B}\} = \tilde{C} = \{z, \mu_{\tilde{C}}(z)\}$, где функция принадлежности результата $\mu_{\tilde{C}}(z)$ определяется по формуле:

$$\mu_{\tilde{C}}(z) = \sup_{z=\max\{x,y\}} \{\min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}\} \tag{6.5}$$

Определение 6.13. Операция *расширенного минимума* нечетких чисел (интервалов) обозначается через $\min(\tilde{A}, \tilde{B}\} = \tilde{C} = \{z, \mu_{\tilde{C}}(z)\}$, где функция принадлежности результата $\mu_{\tilde{C}}(z)$ определяется по формуле:

$$\mu_{\tilde{C}}(z) = \sup_{z=\min\{x,y\}} \{\min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}\} \tag{6.6}$$

Например, пусть задано два нечетких числа— *"нечеткая единица"* и *"нечеткий нуль",* которые описываются следующими конечными нечеткими множествами: $\tilde{I}$={<0, 0.2>, <1, 1.0>, <2, 0.2>} и $\tilde{O}$={<-1, 0.1>, <0, 1.0>, <1, 0.1>}. Рассмотрим выполнение нечеткой операции расширенного максимума с использованием формулы (6.5). Последовательно получим: $\max\{\tilde{I}, \tilde{O}\}$ ={<0, max{min{0.2, 0.1}, min{0.2, 1.0}}>, <l, max{min{1.0, 0.1}, min{1.0, 1.0}, min{1.0, 0.1}, min{0.2, 1.0}}>, <2, max{min{0.2, 0.1}, min{0.2, 1.0},min{0.2, 0.1}}>} = {<0, 0.2>, <1, 1.0>, <2, 0.2>}, т.е. результат равен *"нечеткой единице"*.

При этом значения результата получаются как различные комбинации операции обычного максимума над парами значений исходных нечетких множеств: 0 = max{0, -1} = max{0, 0}, 1= max{1, -1} = max{1, 0} = max {1, 1} = max{0, 1}, 2 = max{2,-1} = max{2, 0} = max{2, 1}.

Аналогичным образом для этого примера можно выполнить нечеткую операцию расширенного минимума с использованием формулы (6.6). Последовательно получим: $min\{\tilde{I},\tilde{O}\}$={<-l, max{min{0.2, 0.1}, min{1.0, 0.1}, min{0.2, 0.1}}>, <0, max{min{0.2, 1.0}, min{0.2, 0.1}, min{0.2, 1.0}, min{1.0, 1.0}}>, <l, max{min{1.0, 0.1}, min{0.2, 0.1}}>} = {<-l, 0.1>, <0, 1.0>, <1, 0.1>}, т. е. результат равен *"нечеткому нулю"*.

6.3. Нечеткие числа и интервалы в форме (*L*-*R*)-функций

Нечеткие числа и интервалы, которые наиболее часто используются для представления нечетких множеств в нечетком моделировании, являются нормальными. Однако данные выше определения нечеткого числа и нечеткого интервала слишком общие, что затрудняет их практическое использование. С вычислительной точки зрения удобно использовать более конкретные определения нечетких чисел и интервалов в форме аналитической аппроксимации с помощью так называемых (*L*-*R*)-*функций.* Получаемые в результате нечеткие числа и интервалы в форме *(L-R)*-функций позволяют охватить достаточно широкий класс конкретных функций принадлежности.

Определение 6.14. *Функция L-типа* (а также и *R-типа),* в общем случае определяется как произвольная функция *L: R*→[0,1] и *R: /R*→[0,1], заданная на множестве действительных чисел, невозрастающая на подмножестве неотрицательных чисел R_+ и удовлетворяющая следующим дополнительным условиям:

L(-x)= L(x), R(-x)=R(x)— условие четности; (6.7)

L(0)=*R*(0) = 1 —*условие нормирования.* (6.8)

<u>Примечание:</u> Иногда в литературе можно встретить еще одно условие, которому должны, по мнению некоторых авторов, удовлетворять функции (*L*-*R*)-типа: *L*(1) = *R*(1) = 0. Поскольку с одной стороны это условие существенно ограничивает класс функций (*L*-*R*)-типа, а с другой стороны, рассматриваемые ниже треугольные нечеткие числа и трапециевидные нечеткие интервалы согласуются с выполнением этого свойства, мы не будем его включать в определение функций (*L*-*R*)-типа.

Как нетрудно заметить, рассмотренные ранее в лекции 3 треугольная функция принадлежности $f_\Delta(x; a, b, c)$ при b=0 и *a*=-*c* (3.1), трапециевидная функция принадлежности $f_T(x; a, b, c, d)$ при *a* = -*d* и *c*=-*b* (3.2) являются функциями *(L-R)-типа,* поскольку удовлетворяют условиям определения (6.7)—(6.8).

Примерами L-функций и, соответственно, *R*-функций являются также следующие функции, которые в общем случае могут быть заданы аналитически в виде:

$$f(x) = e^{-|x|^p}; \tag{6.9}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|^p}, \tag{6.10}$$

где *p* — некоторый параметр, который удовлетворяет условию: *p>0.* Графики функций этого вида для конкретного значения параметра *p=2* изображены на рис. 6.3.

Определение 6.15. *Нечетким числом (L-R)-типа* будем называть нечеткую величину где $\tilde{B} = \{x, \mu_{\tilde{B}}(x)\}$, функция принадлежности которой может быть представлена в форме композиции некоторой *L*-функции и некоторой *R*-функции в следующем виде:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right), & \text{если } x \le a; \\ R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right), & \text{если } x \ge a, \end{cases} \tag{6.11}$$

где α>0 и β>0. При этом параметр *a* является *модой* или модальным значением нечеткого числа, а параметры α и β являются *левым и правым коэффициентами нечеткости* соответственно. Как видно из этого определения, при задании нечетких чисел (L-R)-типа могут использоваться, вообще говоря, две различные функции указанного вида, что существенно расширяет диапазон их возможных представлений.

Из данного определения следует, что нечеткое число (L-R)-типа с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{B}}(x)$, при фиксированных L и R функциях вполне определяется тройкой своих параметров $<a,\ \alpha,\ \beta>$, что оказывается весьма удобным для выполнения операций с подобными числами. Чтобы отметить тот факт, что нечеткое число является (L-R)-типа, будем его обозначать специальным образом: $\tilde{B}_{LR} = < a,\ \alpha,\ \beta >_{LR}$. Расширением понятия нечеткого числа (L-R)-типа является понятие нечеткого интервала (L-R)-типа.

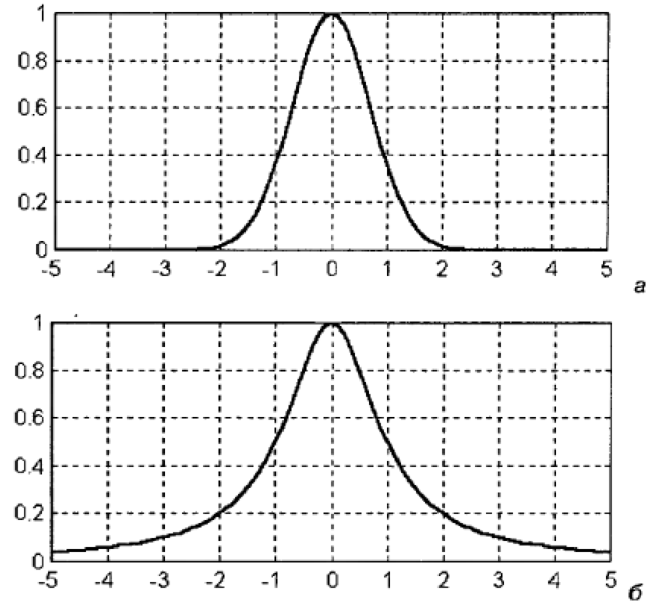


Рис. 6.3. Графики L-функций и R-функций, заданных формулами (6.9) (а) и (6.10) (б) соответственно, для значения параметра p=2

Определение 6.16. *Нечетким интервалом (L-R)-типа* будем называть нечеткую величину $\tilde{B} = \{x, \mu_{\tilde{B}}(x)\}$, функция принадлежности которой может быть представлена в форме композиции некоторой L-функции и некоторой R-функции в следующем виде:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right), & \text{если } x \le a; \\ 1, & \text{если } a < x < b; \\ R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right), & \text{если } x \ge b, \end{cases} \tag{6.12}$$

где a>0 и p>0. При этом параметры a и b определяют ядро нечеткого интервала *(a < b)* и называются соответственно *нижним* и *верхним модальными значениями* нечеткого интервала. Параметры α и β по-прежнему называются *левым и правым коэффициентами нечеткости* соответственно. Следует отметить, что нечеткий интервал (L-R)-типа часто называют *толерантным* нечетким числом (L-R)-типа.

Функция принадлежности $\mu_{\tilde{B}}(x)$, нечеткого интервала (L-R)-типа при фиксированных L и R функциях вполне определяется четверкой своих параметров $< a,\ b,\ \alpha,\ \beta >$, что оказывается весьма удобным для выполнения операций с подобными интервалами. Чтобы отметить тот факт, что нечеткий интервал является (L-R)-типа, будем его обозначать специальным образом: $\tilde{B}_{LR}$ =< a,b, α, β >$_{LR}$.

Из определений (6.11) и (6.12) видно, что при задании нечетких чисел и интервалов (L-R)-типа могут использоваться две различные функции указанного вида. При этом в случае равенства параметров a=b нечеткий интервал (L-R)-типа превращается в нечеткое число (L-R)-типа.

В качестве примеров введенных в рассмотрение понятий можно привести конкретное нечеткое число (L-R)-типа $\tilde{B}_{LR}$ =< *2, 1, 2*>$_{LR}$. и нечеткий интервал *(L-R)*-типа $\tilde{B}_{LR}$ =< *1, 3, 2,* 1>$_{LR}$., где в качестве функции L-типа использована функция (6.9) со значением параметра p=*2,* а в качестве функции R-типа использована функция (6.9) со значением параметра p=*3*. Графическое изображение этих нечеткого числа и нечеткого интервала (L-R)-типов представлено на рис. 6.4.

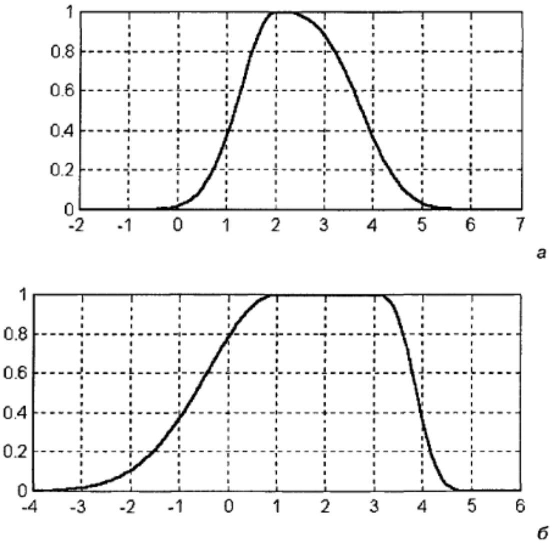


Рис. 6.4. Графики нечеткого числа (L-R)-типа B_{LR} =< *2, 1, 2*>$_{LR}$. (а) и нечеткого интервала (L-R)-типа B_{LR} =< *1, 3, 2,* 1>$_{LR}$ (б)

Операции над нечеткими числами и интервалами (*L*-*R*)-типа

При определении операций над нечеткими числами и интервалами (L-R)-типа следует исходить из следующих соображений. Результат арифметических операций сложения, вычитания, деления и умножения должен быть точно или приблизительно равен некоторому нечеткому числу или интервалу с теми же функциями L-типа и R-типа, а параметры аир результата должны некоторым однозначным образом зависеть от аналогичных параметров исходных нечетких чисел и интервалов (L-R)-типа.

С этой целью для определения аналогов обычных арифметических операций над нечеткими числами и нечеткими интервалами (L-R)-типа целесообразно использовать принцип обобщения (5.20). Замечательным свойством определенных таким способом арифметических операций (сложение, вычитание, умножение и деление) является то, что они определяются на основе значений соответствующих параметров их (L-R)-представлений.

Пусть $\tilde{A}_{LR}$ и $\tilde{B}_{LR}$ — произвольные нечеткие числа (L-R)-типа, заданные параметрически в виде: $\tilde{A}_{LR}$=<a_1, α_1, β_1>$_{LR}$ и $\tilde{B}_{LR}$=<a_2, α_2, β_2>$_{LR}$

Определение 6.17. Операция *сложения* нечетких чисел (L-R)-типа обозначается через $\tilde{A}_{LR} + \tilde{B}_{LR} = \tilde{C}_{LR} =< a, \alpha, \beta >$, где параметры a, a и β результата определяются следующим образом:

$$a=a_1+a_2, \qquad \alpha=\alpha_1+\alpha_2, \qquad \beta=\beta_1+\beta_2. \qquad (6.13)$$

Определение 6.18. Операция *вычитания* нечетких чисел (L-R)-типа обозначается через $\tilde{A}_{LR} - \tilde{B}_{LR} = \tilde{C}_{LR} =< a, \alpha, \beta >$, где параметры a, a и β результата определяются следующим образом:

$$a=a_1-a_2, \qquad \alpha=\alpha_1+\beta_2, \qquad \beta=\beta_1+\alpha_2. \qquad (6.14)$$

Операции умножения и деления нечетких чисел (L-R)-типа могут быть определены при выполнении некоторых дополнительных условий.

Определение 6.19. Умножение положительных нечетких чисел (L-R)-типа $\tilde{A}_{LR}$ и $\tilde{B}_{LR}$, т.е. носители которых являются подмножествами R_+, а модальные значения $a_1>0$ и $a_2>0$. Операция *умножения* таких нечетких чисел (L-R)-типа обозначается $\tilde{A}_{LR} * \tilde{B}_{LR} = \tilde{C}_{LR} =< a, \alpha, \beta >$. где параметры a, a и β результата определяются следующим образом:

$$a=a_1a_2, \qquad \alpha=a_1\alpha_2+a_2\alpha_1, \qquad \beta=a_1\beta_1+a_2\beta_1. \qquad (6.15)$$

Определение 6.20. Умножение нечетких чисел *(L-R)-типа* $\tilde{A}_{LR}$ и $\tilde{B}_{LR}$, для которых модальные значения разных знаков: $\alpha_1<0$ и $\alpha_2>0$. Операция *умножения* таких нечетких чисел (L-R)-типа также обозначается через $\tilde{A}_{LR} * \tilde{B}_{LR} = \tilde{C}_{LR} =< a, \alpha, \beta >$, где параметры a, α и β результата определяются следующим образом:

$$a=a_1a_2, \qquad \alpha=a_2\alpha_1-a_1\beta_2, \qquad \beta=a_2\beta_1-a_1\alpha_2. \qquad (6.16)$$

Определение 6.21. Умножение нечетких чисел (L-R)-типа $\tilde{A}_{LR}$ и $\tilde{B}_{LR}$, для которых модальные значения отрицательные: $\alpha_1<0$ и $\alpha_2>0$. Операция *умножения* таких нечетких чисел (L-R)-типа также обозначается через $\tilde{A}_{LR} * \tilde{B}_{LR} = \tilde{C}_{LR} =< a, \alpha, \beta >$, где параметры a, a и β результата определяются следующим образом:

$$a=a_1a_2, \qquad \alpha=-a_{2\beta 1}-a_1\beta_2, \qquad \beta=-a_2\alpha_1-a_1\alpha_2. \qquad (6.17)$$

Определение 6.22. Деление положительных нечетких чисел (L-R)-типа $\tilde{A}_{LR}$ и $\tilde{B}_{LR}$, т. е. носители которых являются подмножествами R_+, а модальные значения $\alpha_1>0$ и $\alpha_2>0$. Операция *деления* таких нечетких чисел (L-R)-типа обозначается через $\tilde{A}_{LR} \div \tilde{B}_{LR} = \tilde{C}_{LR} =< a, \alpha, \beta >$, где параметры a, a и β результата определяются следующим образом:

$$a=a_1/a_2, \qquad \alpha=(a_1\beta_2+a_2\alpha_1)/a_2^2, \qquad \beta=(a_1\alpha_2+a_2\beta_1)/a_2^2. \qquad (6.18)$$

Определение 6.23. Обратное нечеткое число для положительного нечеткого числа (L-R)-типа $\tilde{A}_{LR}$, т. е. носитель которого является подмножеством R_+, а модальное значение $a_1>0$. В этом случае *обратное нечеткое число* обозначается через $\tilde{B}_{LR}^{\,-1} =< a, \alpha, \beta >$, параметры которого a, a и β определяются следующим образом:

$$a=1/a_1, \qquad \alpha=\beta_1/a_1^2, \qquad \beta=\alpha_1/a_1^2. \qquad (6.19)$$

В качестве примера выполнения операций с нечеткими числами (L-R)-типа рассмотрим два конкретных нечетких числа:*"нечеткая тройка"* и *"нечеткая двойка"*. Для удобства предположим, что эти нечеткие числа заданы с использованием одинаковой L-функции и R-функции, в качестве которой возьмем уже известную нам функцию (6.9) со значением параметра $p=2$. Конкретные значения функций принадлежности этих нечетких чисел изображены на рис. 6.5, при этом значения параметров нечетких чисел следующие:a_1=3, a_1= β_1=2, a_2=2, a_2= β_2=1.

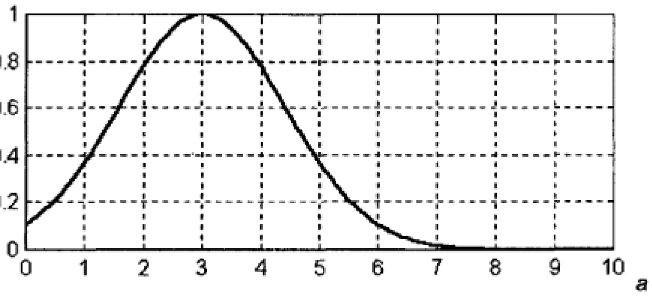


Рис. 6.5. Графики двух нечетких чисел (L-R)-типа: *"нечеткая тройка"* (а)

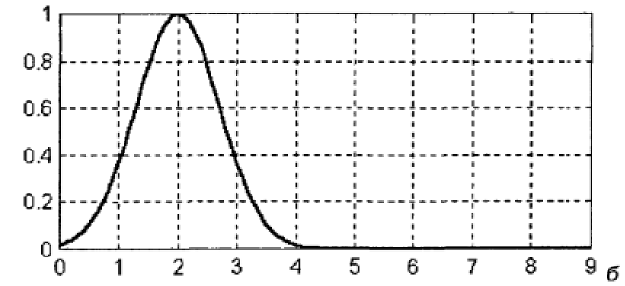


Рис. 6.5. Графики двух нечетких чисел (L-R)-типа: *"нечеткая двойка" (б)*

Результаты выполнения операций сложения и вычитания этих нечетких чисел с использованием формул (6.13) и (6.14) изображены на рис. 6.6, *а* и рис. 6.6, *б.* Эти результаты можно назвать *"нечеткая пятерка"* и *"нечеткая единица"* соответственно. Результаты выполнения операций умножения и деления этих нечетких чисел с использованием формул (6.15) и (6.18) изображены на рис. 6.6, *в* и рис. 6.6, г. Эти результаты можно назвать *"нечеткая шестерка"* и *"нечеткая дробь 3/2"* соответственно. При этом следует заметить, что для удобства изображены лишь фрагменты графиков результирующих функций принадлежности вблизи их модальных значений.

Аналогичным образом можно определить операции над нечеткими интервалами *(L-R)*-типа, а также операции расширенного максимума и расширенного минимума нечетких чисел и интервалов (L-R)-типа. Поскольку подобные операции характеризуются повышенной сложностью соответствующих численных расчетов, они не нашли широкого применения в практике нечеткого моделирования.

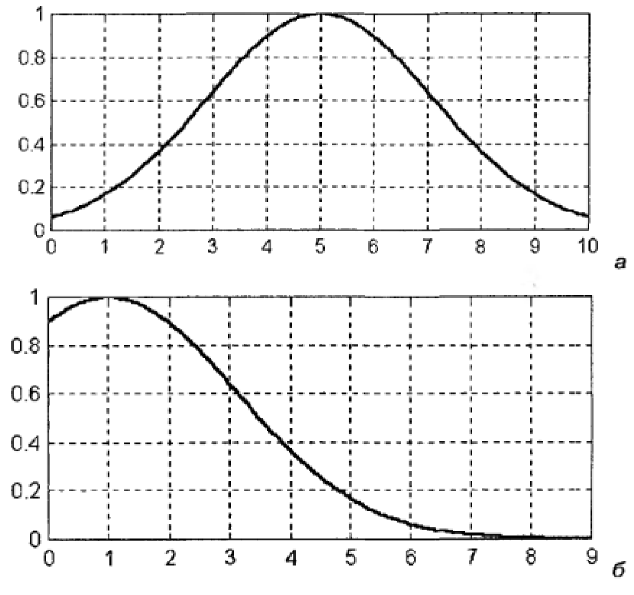
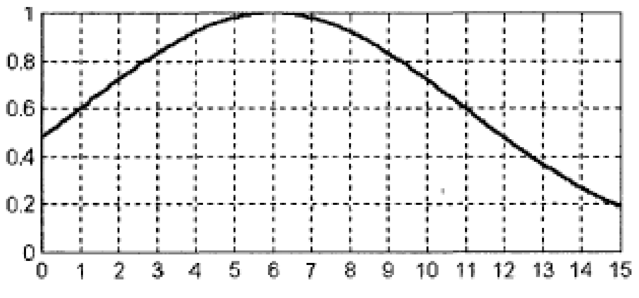


Рис. 6.6. Графики нечетких чисел (L-R)-типа: *"нечеткая пятерка"* (а) и *"нечеткая единица"* (б), которые являются результатами выполнения операций сложения, вычитания, умножения и деления нечетких чисел (L-R)-типа: *"нечеткая тройка"* и *"нечеткая двойка"* соответственно

Наибольший интерес с практической точки зрения представляют аналоги арифметических операций, определенные для треугольных нечетких чисел и трапециевидных нечетких интервалов, которые отличаются наглядностью и простотой интерпретации получаемых результатов. Эти понятия являются темой следующего раздела.



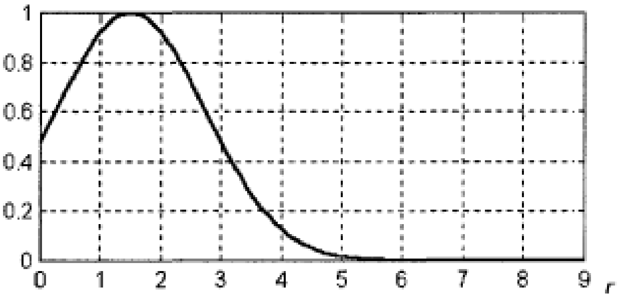


Рис. 6.6. Графики нечетких чисел (L-R)- типа: *"нечеткая шестерка"* (в) и *"нечеткая дробь 3/2"* (г), которые являются результатами выполнения операций сложения, вычитания, умножения и деления нечетких чисел (L-R)- типа: *"нечеткая тройка"* и *"нечеткая двойка"* соответственно

6.4. Треугольные нечеткие числа и трапециевидные нечеткие интервалы

При решении практических задач нечеткого моделирования наибольшее применение нашли простейшие частные случаи нечетких чисел и интервалов, получившие свое название по виду их функций принадлежности. Эти нечеткие числа и интервалы можно рассматривать как частный случай нечетких чисел и интервалов (L-R)-типа, если в качестве соответствующих функций L-типа и R -типа использовать их предельные случаи, а именно— линейные функции. При этом целесообразность использования трапециевидных нечетких интервалов и треугольных нечетких чисел обусловливается не только простотой выполнения операций над ними, но и их наглядной графической интерпретацией.

Определение 6.24. *Треугольным нечетким числом* (сокращенно — ТНЧ) будем называть такое нормальное нечеткое число, функция принадлежности которого может быть задана треугольной функцией f_Δ.

В этом случае ТНЧ удобно представить в виде кортежа из трех чисел: $\tilde{A}_\Delta = \langle a, \alpha, \beta\rangle_\Delta$, где a — *модальное значение* ТНЧ; α и β — *левый и правый коэффициенты нечеткости* ТНЧ. Поскольку, как было отмечено в *лекции 3,* каждая треугольная функция принадлежности порождает нормальное унимодальное выпуклое нечеткое множество с непустым носителем— открытым интервалом (a-α, a+β), то ТНЧ является частным случаем нечеткого числа (L-R)-типа.

<u>Примечание:</u> Напомним, что треугольная функция принадлежности f_Δ характеризуется тремя параметрами и в общем случае с использованием выражения (3.1) может быть записана в виде $f_\Delta(x; a, b, c)$. При этом параметры ТНЧ $\tilde{A}_\Delta = \langle a, \alpha, \beta\rangle_\Delta$, однозначным образом связаны с параметрами треугольной функции принадлежности $f_\Delta(x; a, b, c)$. А именно, модальное значение ТНЧ тождественно равно параметру b функции принадлежности $f_\Delta(x; a, b, c)$, т. е. $a=b$, а левый и правый коэффициенты нечеткости ТНЧ соответственно равны: $a=b-a$, $\beta=c-b$.

Пример конкретного ТНЧ $\langle 3, 1, 2\rangle_\Delta$, которое соответствует *"нечеткой тройке",* изображен на рис. 6.7, *а*. Очевидно, примерами ТНЧ также могут служить нечеткие множества, функции принадлежности которых изображены на рис. 3.1, *а*, а также на рис. 6.1, *б*.

Определение 6.25. *Трапециевидным нечетким интервалом* (сокращенно — ТНИ) будем называть нормальный нечеткий интервал, функция принадлежности которого может быть задана трапециевидной функцией f_T.

В этом случае ТНИ удобно представить в виде кортежа из четырех чисел: $\tilde{A}_T = <a, b, \alpha, \beta>_T$, где a и b — соответственно *нижнее и верхнее модальные значения* ТНИ; α и β — *левый и правый коэффициенты нечеткости* ТНИ. Поскольку каждая трапециевидная функция принадлежности порождает нормальное выпуклое нечеткое множество с непустым носителем — открытым интервалом $(a–\alpha, b+\beta)$, то ТНИ является частным случаем нечеткого интервала $(L\text{-}R)$-типа. Как нетрудно заметить, треугольное нечеткое число $\tilde{A}_\Delta$ является частным случаем трапециевидного нечеткого интервала $\tilde{A}_T = <a, b, \alpha, \beta>_T$ при $a = b$.

<u>Примечание:</u> Трапециевидная функция принадлежности f_T характеризуется четырьмя параметрами и в общем случае с использованием выражения (3.2) может быть записана в виде $f_T(x; a, b, c, d)$. При этом параметры ТНИ , $\tilde{A}_T = <a, b, \alpha, \beta>_T$ однозначным образом связаны с параметрами трапециевидной функции принадлежности $f_T(x; a, b, c, d)$. А именно, нижнее модальное значение ТНИ тождественно равно параметру b функции принадлежности $f_T(x; a, b, c, d)$, верхнее модальное значение ТНИ тождественно равно параметру с функции принадлежности $f_T(x; a, b, c, d)$, т. е. $b=c$, а левый и правый коэффициенты нечеткости ТНЧ соответственно равны: $\alpha=b–a$, $\beta=d–c$.

Пример конкретного ТНИ $<4, 6, 2,1>_т$, которое соответствует *"нечеткому интервалу от 4 до 6"*, изображен на рис. 6.7, *б*. Примерами ТНИ могут служить также нечеткие множества, функции принадлежности которых изображены на рис. 3.1, *б*, 3.5, 6.1, *а, в*.

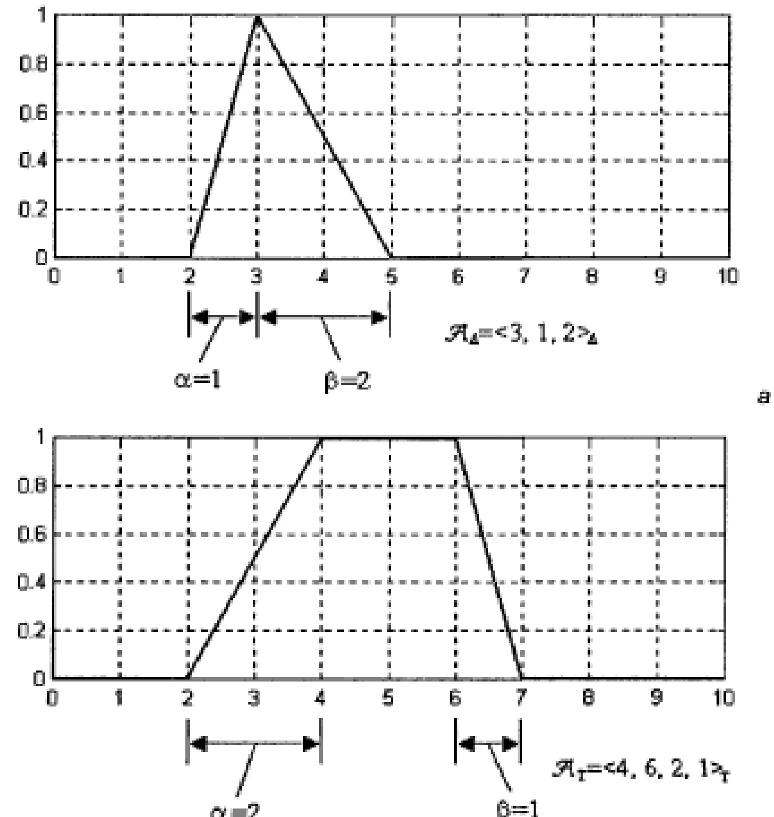


Рис. 6.7. Графическое представление ТНЧ $A_\Delta = <3, 2,1>_\Delta$, (а) и ТНИ $A_T<4, 6, 2, 1>_т$(б)

Операции над треугольными нечеткими числами и трапециевидными нечеткими интервалами

Пусть $\tilde{A}_\Delta$ и $\tilde{B}_\Delta$ — два произвольных треугольных нечетких числа, которые заданы параметрически в виде: $\tilde{A}_\Delta = \langle a_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_\Delta$ и $\tilde{B}_\Delta = \langle a_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_\Delta$. Для этих ТНЧ оказываются справедливыми аналоги обычных арифметических операций, введенных в рассмотрение выше в *разд. 6.3* для треугольных нечетких чисел *(L-R)*-типа. А именно, операция сложения ТНЧ определяется выражением (6.13), операция вычитания ТНЧ — выражением (6.14), операция умножения ТНЧ— выражениями (6.15)—(6.17), операция деления— выражением (6.18), и, наконец, обратное ТНЧ — выражением (6.19).

Например, для конкретных ТНЧ $\tilde{A}_\Delta = \langle 3,1,2 \rangle_\Delta$ и $\tilde{B}_\Delta = \langle 2,2,1 \rangle_\Delta$ результаты арифметических операций равны: $\tilde{A}_\Delta + \tilde{B}_\Delta = \langle 5,3,3 \rangle_\Delta$, $\tilde{A}_\Delta - \tilde{B}_\Delta = \langle 1,2,4 \rangle_\Delta$, $\tilde{A}_T \cdot \tilde{B}_\Delta = \langle 6,8,7 \rangle_\Delta$, $\tilde{A}_\Delta \div \tilde{B}_\Delta = \langle 1.5, 1.25, 2.5 \rangle_\Delta$. Графики результатов операций с этими ТНЧ изображены на рис. 6.9 *(а—г)* соответственно.

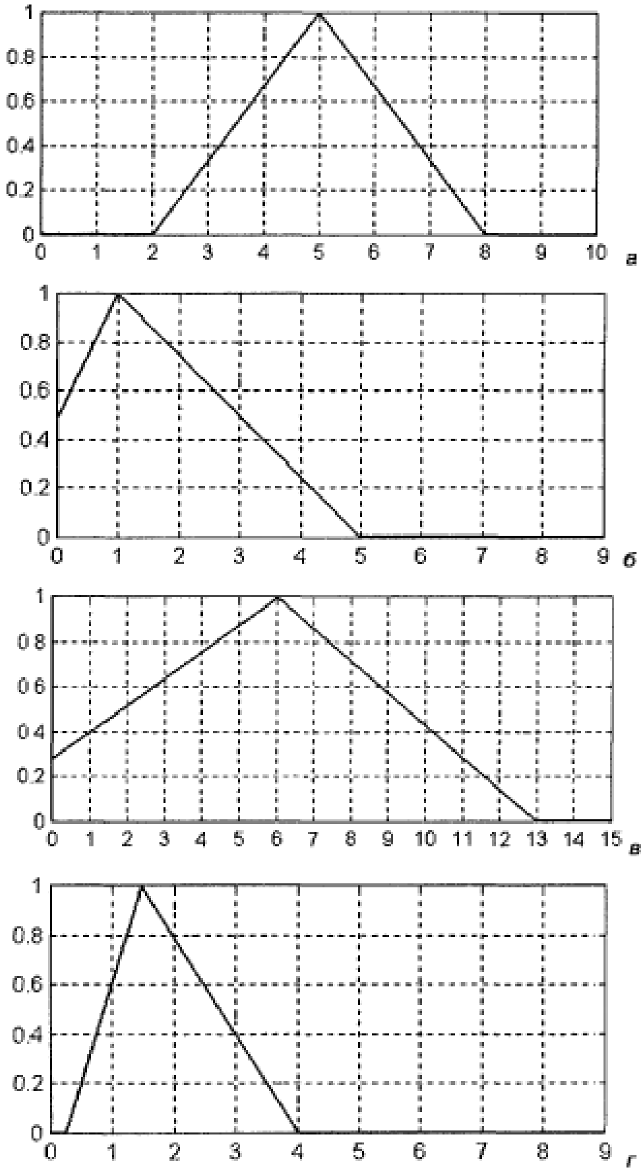


Рис. 6.9. Графики ТНЧ: *"нечеткая пятерка"* (а) и *"нечеткая единица"* (б), *"нечеткая шестерка" (в)* и *"нечеткая дробь 3/2"* (г), которые являются результатами выполнения операций сложения, вычитания, умножения и деления ТНЧ: *"нечеткая тройка"* и *"нечеткая двойка"* соответственно

Перейдем к рассмотрению операций с ТНИ. Пусть $\tilde{A}_T$ и $\tilde{B}_T$ — два произвольных трапециевидных нечетких интервала, которые заданы параметрически в виде: $\tilde{A}_T = \langle a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_T$

и $\tilde{B}_T$=< a_2, b_2, α_2, β_2>т .

Определение 6.26. Операция *сложения* ТНИ обозначается через $\tilde{A}_T$+$\tilde{B}_T$ =$\tilde{C}_T$= < a, b, α, β>т, где параметры a, b, α и β результата определяются следующим образом:

$$a=a_1+a_2, \qquad b=b_1+b_2, \qquad \alpha=\alpha_1+\alpha_2, \qquad \beta=\beta_1+\beta_2. \qquad (6.20)$$

Определение 6.27. Операция *вычитания* ТНИ обозначается через $\tilde{A}_T$– $\tilde{B}_T$ =$\tilde{C}_T$= < a, b, α, β>т, где параметры a, b, α и β результата определяются следующим образом:

$$a=a_1–a_2, \qquad b=b_1–b_2, \qquad \alpha=\alpha_1+\beta_2, \qquad \beta=\beta_1+\alpha_2. \qquad (6.21)$$

Определение 6.28. Умножение положительных ТНИ $\tilde{A}_T$ и $\tilde{B}_T$, т. е. носители которых являются подмножествами R_+, а все модальные значения положительные. Операция *умножения* таких ТНИ обозначается через $\tilde{A}_T * \tilde{B}_T$ =$\tilde{C}_T$= < a, b, α, β>т, где параметры a, b, α и β результата определяются следующим образом:

$$a=a_1a_2, \qquad b=b_1b_2, \qquad \alpha=a_1\alpha_2+a_2\alpha_1, \qquad \beta=b_1\beta_2+b_2\beta_1. \qquad (6.22)$$

Определение 6.29. Деление положительных ТНИ A_T и B_T, т. е. носители которых являются подмножествами R_+, а все модальные значения положительные. Операция *деления* таких ТНИ обозначается через $\tilde{A}_T \div \tilde{B}_T$ =$\tilde{C}_T$= < a, b, α, β>т,, где параметры a, b, α и β результата определяются следующим образом:

$$a=a_1/b_2, \qquad b=b_1/a_2, \qquad \alpha=(a_1\beta_2+b_2\alpha_1)/b_2^2, \qquad \beta=(b_1\alpha_2+a_2\beta_1)/a_2^2. \qquad (6.23)$$

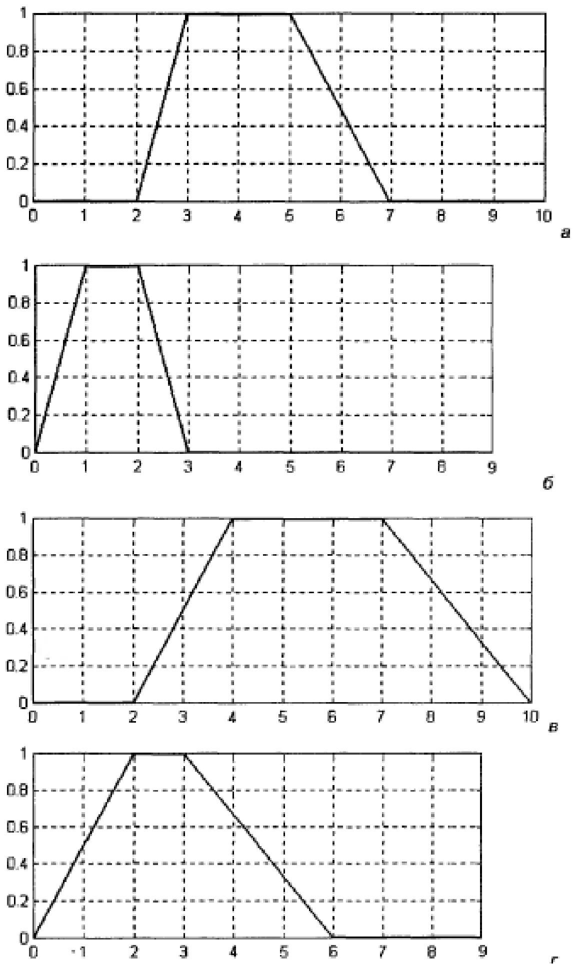


Рис. 6.10. Графики ТНИ: *"нечеткий интервал от трех до пяти"* (*а*), *"нечеткий интервал от единицы до двух"* (*б*), а также результат их сложения (*в*) и вычитания (*г*)

Например, рассмотрим два конкретных ТНИ: $\tilde{A}_T$=<3, 5, 1, 2>т и $\tilde{B}_T$=<1, 2, 1, 1>т. Первый из них соответствует *"нечеткому интервалу от трех до пяти"*, а второй — *"нечеткому интервалу от единицы до двух"*. Тогда результат их сложения с использованием формул

(6.20) равен ТНИ $\tilde{A}_T + \tilde{B}_T$=<4, 7, 2, 3>$_T$ и соответствует *"нечеткому интервалу от четырех до семи"*. Результат вычитания из первого ТНИ второго ТНИ с использованием формул (6.21) равен ТНИ: $\tilde{A}_T - \tilde{B}_T$ = <2, 3, 2, 3>$_T$ и соответствует *"нечеткому интервалу от двух до трех"*. Графики соответствующих ТНИ представлены на рис. 6.10.

Для нас представляют интерес операции расширенного максимума и расширенного минимума ТНИ $\tilde{A}_T$= <a_1, b_1, α_1, β_1>$_T$ и $\tilde{B}_T$= < a_2, b_2, α_2, β_2>$_T$ (соответственно — ТНЧ), которые определяются следующим образом.

Определение 6.30. Операция *расширенного максимума* ТНИ обозначается через max{ $\tilde{A}_T$, $\tilde{B}_T$} = $\tilde{C}_T$= <a,b,α,β>$_T$, где параметры a, b, α и β результата определяются следующим образом:

$$a = \max\{a_1,a_2\}, \qquad b = \max\{b_1,b_2\},$$
$$\alpha= a-\max\{a_1- \alpha_1, a_2- \alpha_2\}, \qquad \beta = \max\{b_1+\beta_1, b_2+ \beta_2\}-b. \qquad (6.27)$$

Определение 6.31. Операция *расширенного минимума* ТНИ обозначается через min{ $\tilde{A}_T$, $\tilde{B}_T$} = $\tilde{C}_T$= <a,b,α, β>$_T$, где параметры a,b,α и β результата определяются следующим образом:

$$a = \min\{a_1,a_2\}, \qquad b = \min\{b_1,b_2\},$$
$$\alpha= a-\min\{a_1- \alpha_1, a_2- \alpha_2\}, \qquad \beta = \min\{b_1+\beta_1, b_2+ \beta_2\}-b. \qquad (6.28)$$

В заключение этой лекции приведем некоторые рекомендации, которые целесообразно использовать в процессе представления различных термов тех или иных лингвистических переменных нечеткими числами и интервалами *(L-R)*-типа, а также их более простыми частными случаями — ТНЧ и ТНИ (табл. 6.1).

Таблица 6.1. Рекомендации по представлению термов лингвистических переменных

Терм лингвистической переменной	*(L-R)*-представление	Представление в форме ТНЧ и ТНИ
Средний, около, приблизительно	<a, α, β>$_{LR}$, где $\alpha<\infty$, $\beta<\infty$	<a, α, β>$_\Delta$, где $\alpha<\infty$, $\beta<\infty$
Малый, низкий	<a, ∞, β>$_{LR}$, где $\alpha=\infty$, $\beta<\infty$	<a, ∞, β>$_\Delta$, где $\alpha=\infty$, $\beta<\infty$
Большой, высокий	<a, α, ∞>$_{LR}$, где $\alpha<\infty$, $\beta=\infty$	<a, α, ∞>$_\Delta$, где $\alpha<\infty$, $\beta=\infty$
Приблизительно в диапазоне, в интервале (a, b), где $a<\infty$ и $b<\infty$	<a, b, α, β>$_{LR}$, где $\alpha<\infty$, $\beta<\infty$	<a, b, α, β>$_T$, где $\alpha<\infty$, $\beta<\infty$
Точно в диапазоне, в интервале [a, b], где $a<\infty$ и $b<\infty$		<a, b, α, β>$_T$, где $\alpha=0$, $\beta=0$
Точно равен числу a, где $a<\infty$		<a, α, β>$_\Delta$, где $\alpha=0$, $\beta=0$
Не превышает значения b, где $b<\infty$	<a, b, α, β>$_{LR}$, где $a=\infty$, $\alpha=\infty$, $\beta<\infty$	<a, b, α, β>$_T$, где $a=\infty$, $\alpha=\infty$, $\beta<\infty$
Не меньше, чем значение a, где $a<\infty$	<a, b, α, β>$_{LR}$, где $b=\infty$, $\alpha<\infty$, $\beta=\infty$	<a, b, α, β>$_T$, где $b=\infty$, $\alpha<\infty$, $\beta=\infty$

Подводя итог этой лекции, заметим, что при решении практических задач нечеткого моделирования наиболее удобными оказываются ТНЧ и ТНИ. Именно они наиболее часто используются для представления входных и выходных переменных нечетких моделей систем управления, о которых пойдет речь в последующих лекциях.

Литература:

Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. — СПб.: БХВ Петербург, 2005. — 736 с.: ил.