Лекция 7
Основы нечеткой логики

Нечеткая логика предназначена для формализации человеческих способностей к неточным или приближенным рассуждениям, которые позволяют более адекватно описывать ситуации с неопределенностью. Классическая логика по своей сути игнорирует проблему неопределенности, поскольку все высказывания и рассуждения в формальных логических системах могут иметь только значение *"истина"* (**И**, 1) или значение *"ложь"* (**Л**, 0). В отличие от этого в нечеткой логике истинность рассуждений оценивается в некоторой степени, которая может принимать и другие отличные {**И**, **Л**} значения.

Чтобы иметь возможность выражать неопределенные знания, необходима такая логическая система, которая позволяет некоторому предложению иметь истинностное значение, отличающееся от бинарного **И** или **Л**. Один из подходов — расширить множество истинностных значений {**И**, **Л**} и позволить предложениям принимать некоторые дополнительные значения истинности. Одним из первых логиков, предложивших в 1930 г. вариант многозначной логической системы, отличающийся от классической бинарной логики, был польский математик Ян Лукасевич (1878—1956). В трехзначной логике Лукасевича используется 3 истинностных значения: {0, 0.5, 1}, где значение 0 интерпретируется как *"ложь",* 1 — как *"истина",* а число 0.5— как *"возможно".* В качестве высказываний с истинностным значением *"возможно"* могут выступать такие, которые относятся к некоторому моменту времени в будущем.

Так, например, высказывание *"Сборная России по футболу выйдет в 1/8 финала на предстоящем Чемпионате мира"* до начала Чемпионата не может быть оценено ни как истинное, ни как ложное. Именно по этой причине более адекватным ответом на вопрос об его истинности будет использование трехзначной логики с соответствующей интерпретацией истинности в форме значения *"возможно".*

Наряду с понятием нечеткого множества, Л. Заде предложил обобщение классической логики на основе рассмотрения бесконечного множества значений истинности. Далее в этой лекции изложены основы нечеткой логики, которая использует основные понятия теории нечетких множеств для формализации неточных знаний и выполнения приближенных рассуждений в той или иной проблемной области.

7.1. Понятие нечеткого высказывания и нечеткого предиката

В предложенном Л. Заде варианте нечеткой логики множество истинностных значений высказываний обобщается до интервала действительных значений [0, 1], что позволяет высказыванию принимать любое значение истинности из этого интервала. Это численное значение является количественной оценкой степени истинности высказывания, относительно которого нельзя с полной уверенностью заключить о его истинности или ложности. Использование в качестве множества истинностных значений интервала [0, 1] позволяет построить логическую систему, в рамках которой оказалось возможным выполнять рассуждения с неопределенностью и оценивать истинность высказываний типа: *"Скорость автомобиля довольно высокая", "Давление в системе весьма значительное", "Высота полета самолета предельно низкая"* и др.

Исходным понятием нечеткой логики является понятие элементарного нечеткого высказывания.

Определение 7.1. В общем случае *элементарным нечетким высказыванием* называется повествовательное предложение, выражающее законченную мысль, относительно которой мы можем судить об ее истинности или ложности только с некоторой степенью уверенности.

Элементарные нечеткие высказывания для удобства будем обозначать теми же буквами, что и нечеткие множества: $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ (возможно, с индексами). Сами элементарные нечеткие

высказывания иногда называют просто нечеткими высказываниями.

Главным отличием элементарного нечеткого высказывания от элементарного высказывания математической логики является следующий факт. Множество значений истинности элементарных высказываний классической математической логики состоит из двух элементов: {*"истина", "ложь"*} ({**И**, **Л**} или {0, 1}), при этом значению *"истина"* соответствует цифра 1 или буква **И**, а значению *"ложь"* — цифра 0 или буква **Л**. В нечеткой логике *степень истинности* элементарного нечеткого высказывания принимает значение из замкнутого интервала [0, 1], причем 0 и 1 являются предельными значениями степени истинности и совпадают со значениями *"ложь"* и *"истина"* соответственно.

Пример 7.1. Ниже приводится несколько примеров элементарных нечетких высказываний:

1. *О. Бендер имеет довольно высокий рост.*
2. *Завтра будет пасмурная погода.*
3. *3 — малое число.*
4. *ВАЗ 2110 является скоростным автомобилем.*
5. *Возможно, нам подадут горячий кофе.*

Содержательно неопределенность нечетких высказываний может иметь различную природу. Так, например, неопределенность оценки истинности в высказывании (1) связана с нечеткостью определения понятия *"высокий рост",* которое является нечеткой переменной. Аналогичный характер неопределенности имеют нечеткие высказывания (3) и (4), связанные с определением нечетких переменных *"малое число"* и *"скоростной автомобиль"* соответственно. Что касается высказываний (2) и (5), то здесь кроме определения нечетких переменных *"пасмурная погода"* и *"горячий кофе"* следует оценить их истинность относительного некоторого момента времени в будущем. Общим для всех этих высказываний является то обстоятельство, что относительно их истинности мы можем судить лишь с некоторой степенью, количественно оцениваемой действительным числом из интервала [0, 1].

Для оценки степени истинности произвольного нечеткого высказывания удобно ввести в рассмотрение специальное отображение T, которое действует из множества рассматриваемых нечетких высказываний $\widetilde{U}$ в интервал [0, 1], т. е. T: $\widetilde{U} \to [0,1]$. Это отображение будем называть *отображением истинности* нечетких высказываний. В этом случае значение истинности некоторого нечеткого высказывания $\tilde{A} \in \widetilde{U}$ будем обозначать через T($\tilde{A}$). Так, если обозначить нечеткое высказывание (1) из примера 6.1 через $\tilde{A}_1$**,** то его истинность формально может быть записана как T($\tilde{A}_1$), а количественно равна, например, 0.7, т.е. T($\tilde{A}_1$) = 0.7.

Нечеткие предикаты

Определение 7.2. *Нечеткий предикат* P(<x_1, x_2, …, x_k>) или, более строго, *k-местный нечеткий предикат,* формально определяется как некоторое отображение из декартова произведения универсумов $X_1, X_2,..., X_k$ в некоторое вполне упорядоченное множество значений истинности, в частности, в интервал [0,1], т. е. P: $X_1 \times X_2 \times ... \times X_k \to [0, 1]$. По аналогии с обычными предикатами, переменные $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называются *предметными* переменными нечеткого предиката P(<x_1, x_2, …, x_k >**)**, а декартово произведение универсумов $X_1 \times X_2 \times ... \times X_k$ — его *предметной областью.*

Взаимосвязь между нечеткими высказываниями и нечеткими предикатами устанавливается с помощью процесса так называемого *означивания* нечеткого предиката P(<x_1, x_2, …, x_k >**)**, под которым понимается подстановка вместо предикатных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ конкретных значений из соответствующих универсумов: $a_1 \in X_1$, $a_2 \in X_2$,..., $a_k \in X_k$. В этом случае нечеткий предикат P(<x_1, x_2, …, x_k >**)** превращается в некоторое нечеткое высказывание $\tilde{P}$, которое принимает конкретное значение истинности, равное числу из интервала [0, 1].

Нечеткое обобщение логики предикатов первого порядка, так же как и соответ-

ствующие ей нечеткие исчисления, не нашли широкого применения при решении прикладных задач. Наиболее конструктивным направлением в нечеткой логике оказалось нечеткое обобщение правил продукций, использующих нечеткие высказывания в форме означивания лингвистических переменных. В этом случае нечеткие высказывания могут комбинироваться с помощью нечетких логических операций или связок, которые и рассматриваются ниже.

7.2. Основные логические операции с нечеткими высказываниями

Пусть $\widetilde{U}$— некоторое множество элементарных нечетких высказываний, а T : $\widetilde{U}$→[0, 1] — отображение истинности высказываний.

Логическое отрицание нечетких высказываний

Определение 7.3. *Отрицанием* нечеткого высказывания $\tilde{A}$ (записывается как: $\neg\tilde{A}$ и читается— *"не $\tilde{A}$", "неверно, что $\tilde{A}$"***)** называется унарная логическая операция, результат которой является нечетким высказыванием, истинность которого по определению принимает значение:

$$\mathrm{T}(\neg\tilde{A}) = 1 - \mathrm{T}(\tilde{A}). \qquad (7.1)$$

Очевидно, что принятый в математической логике способ определять логические операции с помощью таблиц истинности не может быть использован в нечеткой логике. Причина этого заключается в континуальной мощности множества истинностных значений [0, 1]. Именно поэтому центральную роль в определении логических операций в нечеткой логике приобретает отображение истинности T, которое имеет вспомогательное значение в классической математической логике.

Примером применения операции логического отрицания к нечеткому высказыванию *"О. Бендер имеет довольно высокий рост"* будет высказывание *"Неверно, что О. Бендер имеет довольно высокий рост",* степень истинности которого с учетом ранее определенного значения для $\mathrm{T}(\tilde{A}_1)$ равна 0.3. Отрицанием высказывания *"Завтра будет пасмурная погода"* будет высказывание *"Завтра будет не пасмурная погода",* степень истинности которого, если принять $\mathrm{T}(\tilde{A}_2) = 0.2$, принимает значение 0.8.

Логическая конъюнкция нечетких высказываний

Определение 7.4. *Конъюнкцией* нечетких высказываний $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ (записывается как: $\tilde{A} \wedge \tilde{B}$ и читается — "$\tilde{A}$ и $\tilde{B}$") называется бинарная логическая операция, результат которой является нечетким высказыванием, истинность которого определяется по формуле:

$$\mathrm{T}(\tilde{A} \wedge \tilde{B}) = \min\{\mathrm{T}(\tilde{A}),\ \mathrm{T}(\tilde{B})\}. \qquad (7.2)$$

Логическую конъюнкцию нечетких высказываний также называют *нечетким логическим* "И", *нечеткой конъюнкцией* или min-конъюнкцией и иногда записывают также в форме $\tilde{A}$ AND $\tilde{B}$. При этом исторически принято считать формулу (7.2) *основной* для определения степени истинности ее результата.

По аналогии с операциями над нечеткими множествами, рассмотренными в *лекции 4,* для определения степени истинности конъюнкции нечетких высказываний могут быть использованы следующие альтернативные формулы.

Алгебраическое произведение степеней истинности нечетких высказываний:

$$\mathrm{T}(\tilde{A} \wedge \tilde{B}) = \mathrm{T}(\tilde{A}) \cdot \mathrm{T}(\tilde{B}). \qquad (7.3)$$

Граничное произведение степеней истинности нечетких высказываний:

$$\mathrm{T}(\tilde{A} \wedge \tilde{B}) = \max\{\mathrm{T}(\tilde{A}) + \mathrm{T}(\tilde{B}) - 1,\ 0\}. \qquad (7.4)$$

Пример 7.2. Рассмотрим составное нечеткое высказывание, состоящее из двух элементарных: *"О. Бендер имеет довольно высокий рост и завтра будет пасмурная погода"* и предположим, что истинность первого из них равна $\mathrm{T}(\tilde{A}_1) = 0.7$, а истинность второго — $\mathrm{T}(\tilde{A}_2) = 0.2$. Тогда истинность логической конъюнкции этих нечетких высказываний, вычис-

ленная по основной формуле (7.2), равна: $T(\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2) = 0.2$. Значения истинности этой же конъюнкции, рассчитанные по остальным формулам, равны: 0.14 и 0.

Логическая дизъюнкция нечетких высказываний

Определение 7.5. *Дизъюнкцией* нечетких высказываний $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ (записывается как: $\tilde{A} \vee \tilde{B}$ и читается — *"$\tilde{A}$ или $\tilde{B}$"*) называется бинарная логическая операция, результат которой является нечетким высказыванием, истинность которого по определению принимает значение:

$$T(\tilde{A} \vee \tilde{B}) = \max\{T(\tilde{A}), T(\tilde{B})\}. \quad (7.5)$$

Логическую также называют логическим *неисключающим* "ИЛИ".

Логическую дизъюнкцию нечетких высказываний также называют *нечетким неисключающим логическим* "ИЛИ", *нечеткой дизъюнкцией* или шах-дизъюнкцией и иногда записывают также в форме $\tilde{A}$ OR $\tilde{B}$. При этом исторически принято считать формулу (7.5) основной для определения степени истинности ее результата.

По аналогии с операциями над нечеткими множествами, рассмотренными в *лекции 3*, для определения степени истинности дизъюнкции нечетких высказываний могут быть использованы следующие альтернативные формулы.

Алгебраическая сумма степеней истинности нечетких высказываний:

$$T(\tilde{A} \vee \tilde{B}) = T(\tilde{A}) + T(\tilde{B}) - T(\tilde{A}) \cdot T(\tilde{B}). \quad (7.6)$$

Граничная сумма степеней истинности нечетких высказываний:

$$T(\tilde{A} \vee \tilde{B}) = \min\{T(\tilde{A}) + T(\tilde{B}), 1\}. \quad (7.7)$$

Пример 7.3. Как и выше, рассмотрим составное нечеткое высказывание: *"О. Бендер имеет довольно высокий рост или завтра будет пасмурная погода"* и предположим, что истинность входящих в него элементарных нечетких высказываний по-прежнему равна $T(\tilde{A}_1) = 0.7$ и $T(\tilde{A}_2) = 0.2$. Тогда истинность логической дизъюнкции этих нечетких высказываний, вычисленная по основной формуле (7.5), равна: $T(\tilde{A} \vee \tilde{B}) = 0.7$. Значения истинности этой же дизъюнкции, рассчитанные по остальным формулам, равны: 0.76 и 0.9.

Нечеткая импликация

Определение 7.3. *Нечеткой импликацией* или просто — *импликацией* нечетких высказываний $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ (записывается как: $\tilde{A} \supset \tilde{B}$ и читается — "из $\tilde{A}$ следует $\tilde{B}$", "ЕСЛИ $\tilde{A}$, ТО $\tilde{B}$") называется бинарная логическая операция, результат которой является нечетким высказыванием, истинность которого может принимать значение, определяемое по одной из следующих формул.

- Классическая нечеткая импликация, предложенная Л. Заде:

$$T(\tilde{A} \supset \tilde{B}) = \max\{\min\{T(\tilde{A}), T(\tilde{B})\}, 1 - T(\tilde{A})\}. \quad (7.8)$$

  Эту форму нечеткой импликации называют также *нечеткой импликацией Заде.*

- Классическая нечеткая импликация для случая $T(\tilde{A}) \geq T(\tilde{B})$:

$$T(\tilde{A} \supset \tilde{B}) = \max\{T(\neg\tilde{A}), T(\tilde{B})\} = \max\{1 - T(\tilde{A}), T(\tilde{B})\}. \quad (7.9)$$

  Эту форму нечеткой импликации иногда называют *нечеткой импликацией Гёделя.*

- Нечеткая импликация, предложенная Э. Мамдани:

$$T(\tilde{A} \supset \tilde{B}) = \min\{T(\tilde{A}), T(\tilde{B})\} \quad (7.10)$$

  Эту форму нечеткой импликации также называют *нечеткой импликацией Мамдани* или нечеткой импликацией *минимума корреляции.*

- Нечеткая импликация, предложенная Я. Лукасевичем:

$$T(\tilde{A} \supset \tilde{B}) = \min\{1, 1 - T(\tilde{A}) + T(\tilde{B})\} \quad (7.11)$$

  Эту форму нечеткой импликации также называют *нечеткой импликацией Лукасевича.*

- Нечеткая импликация, предложенная Дж. Гогеном:

$$T(\tilde{A} \supset \tilde{B}) = \min\{1, T(\tilde{B})/T(\tilde{A})\} \quad \text{где } T(\tilde{A}) > 0. \quad (7.12)$$

Эту форму нечеткой импликации также называют *нечеткой импликацией Гогена.*

- Нечеткая импликация по формуле граничной суммы:

$$T(\tilde{A} \supset \tilde{B}) = \min\{1, T(\tilde{B})+T(\tilde{A})\} \quad (7.13)$$

- Нечеткая импликация по формуле произведения:

$$T(\tilde{A} \supset \tilde{B}) = T(\tilde{A})+T(\tilde{B}). \quad (7.14)$$

- Нечеткая импликация, предложенная Н. Вади:

$$T(\tilde{A} \supset \tilde{B}) = \max\{T(\tilde{A})\cdot T(\tilde{B}), 1- T(\tilde{A})\}. \quad (7.15)$$

Нечеткая импликация играет важную роль в процессе нечетких логических рассуждений. Так же, как и в математической логике первый ее операнд (нечеткое высказывание) называется *посылкой* или *антецедентом,* а второй — *заключением* или *консетентом.*

Хотя классическая нечеткая импликация находит наибольшее применение при решении прикладных задач и она остается справедливой в случае обычных высказываний классической логики, остальные способы вычисления нечеткой импликации в отдельных ситуациях оказываются более эффективными с вычислительной точки зрения.

Пример 7.4. Рассмотрим составное нечеткое высказывание в форме нечеткой импликации: *"Если О. Бендер имеет довольно высокий рост, то завтра будет пасмурная погода",* при этом истинность входящих в него элементарных нечетких высказываний по-прежнему равна $T(\tilde{A}_1) = 0.7$ и $T(\tilde{A}_2) = 0.2$. Тогда истинность этой нечеткой импликации, вычисленная по основной формуле (7.8), равна $T(\tilde{A} \supset \tilde{B}) = 0.3$, по формуле (7.10) — $T(\tilde{A} \supset \tilde{B}) = 0.2$, по формуле (7.11) — $T(\tilde{A} \supset \tilde{B}) = 0.5$, по формуле (7.12) — $T(\tilde{A} \supset \tilde{B}) = 0.29$, по формуле (7.13) — $T(\tilde{A} \supset \tilde{B}) = 0.9$, по формуле (7.14) — $T(\tilde{A} \supset \tilde{B}) = 0.14$, по формуле (7.15) — $T(\tilde{A} \supset \tilde{B}) = 0.3$.

Нечеткая эквивалентность

Определение 7.5. *Эквивалентностью* нечетких высказываний $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ или просто нечеткой эквивалентностью (записывается как: $\tilde{A} \equiv \tilde{B}$ и читается— *"$\tilde{A}$ эквивалентно $\tilde{B}$")* называется бинарная логическая операция, результат которой является нечетким высказыванием, истинность которого определяется по следующей формуле:

$$T(\tilde{A} \equiv \tilde{B}) = \min\{\max\{T(\neg\tilde{A}), T(\tilde{B})\}, \max\{ T(\tilde{A}), T(\neg\tilde{B})\}\}. \quad (7.16)$$

Примером логической эквивалентности может служить составное нечеткое высказывание: *"О. Бендер имеет довольно высокий рост эквивалентно тому, что завтра будет пасмурная погода",* истинность которого принимает значение 0.3.

Так же, как в классической математической логике, в нечеткой логике с помощью рассмотренных логических связок могут быть образованы достаточно сложные нечеткие высказывания. При этом для явного указания порядка их следования используются круглые скобки, а иногда— и приоритет соответствующих нечетких логических операций.

Следует отметить, что обязательным условием корректности определения истинности составных нечетких высказываний является требование одновременной подстановки вместо одинаковых букв одних и тех же нечетких высказываний. Кроме рассмотренных логических операций могут быть определены и другие бинарные логические операции с нечеткими высказываниями. Более детально познакомиться с ними можно в специальной литературе.

7.3. Правила нечетких продукций

Продукционные системы были разработаны в рамках исследований по методам искусственного интеллекта и нашли широкое применение для представления знаний и вывода заключений в экспертных системах, основанных на правилах. Поскольку нечеткий вывод реализуется на основе нечетких продукционных правил, рассмотрение базового формализма нечетких продукционных моделей приобретает самостоятельное значение. При этом нечеткие правила продукций не только во многом близки к логическим моделям, но и, что наиболее важно, позволяют адекватно представить практические знания экспертов в той или иной

проблемной области.

Определение 7.6. В общем случае под *правилом нечеткой продукции* или просто — *нечеткой продукцией* понимается выражение следующего вида:

$$(i): Q; P;\ \tilde{A} \Rightarrow \tilde{B}; S, F, N, \qquad (7.17)$$

где (i)— имя нечеткой продукции; Q— сфера применения нечеткой продукции; P— условие применимости ядра нечеткой продукции; $\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B}$— ядро нечеткой продукции, в котором $\tilde{A}$ — условие ядра (или антецедент); $\tilde{B}$ — заключение ядра (или консеквент); "⇒" — знак логической секвенции (или следования); S — метод или способ определения количественного значения степени истинности заключения ядра; F— коэффициент определенности или уверенности нечеткой продукции; N— постусловия продукции.

По аналогии с обычным правилом продукции, в качестве имени (i) нечеткой продукции может выступать та или иная совокупность букв или символов, позволяющая однозначным образом идентифицировать нечеткую продукцию в системе нечеткого вывода или базе нечетких правил. В качестве имени нечеткой продукции может использоваться ее номер в системе.

Сфера применения нечеткой продукции Q, условие применимости ядра нечеткой продукции P и постусловие нечеткой продукции N определяются аналогично обычной не нечеткой продукции.

Аналогично обычным правилам продукций ядро $\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B}$ также является центральным компонентом нечеткой продукции. Ядро продукции записывается в более привычной форме: "ЕСЛИ $\tilde{A}$, ТО $\tilde{B}$" или в наиболее распространенном виде: "IF $\tilde{A}$, THEN $\tilde{B}$", где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — некоторые выражения нечеткой логики, которые наиболее часто представляются в форме нечетких высказываний. При этом секвенция интерпретируется в обычном логическом смысле как знак логического следования заключения $\tilde{B}$ из условия $\tilde{A}$. В качестве выражений $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ могут использоваться составные логические нечеткие высказывания, т. е. элементарные нечеткие высказывания, соединенные нечеткими логические связками, такими как нечеткое отрицание, нечеткая конъюнкция и нечеткая дизъюнкция.

S — метод или способ определения количественного значения степени истинности заключения $\tilde{B}$ на основе известного значения степени истинности условия $\tilde{A}$. Данный способ в общем случае определяет так называемую *схему* или алгоритм нечеткого вывода в продукционных нечетких системах и называется также *методом композиции* или *методом активации* согласно Стандарту IEC 1131-7. В настоящее время для этой цели предложено несколько способов, основные из которых рассматриваются ниже в настоящем разделе.

F — коэффициент определенности или уверенности выражает количественную оценку степени истинности или относительный вес нечеткой продукции. Коэффициент уверенности принимает свое значение из интервала [0, 1] и часто называется весовым коэффициентом нечеткого правила продукции.

Продукционная нечеткая система или *система нечетких правил продукций* представляет собой некоторое согласованное множество отдельных *нечетких продукций* или правил нечетких продукций в форме "ЕСЛИ $\tilde{A}$, ТО $\tilde{B}$" (или в виде: "IF $\tilde{A}$, THEN $\tilde{B}$", как определено в Стандарте IEC 1131-7). Далее обе эти формы записи будут использоваться как эквивалентные в зависимости от удобства в том или ином контексте.

Основная проблема приближенных рассуждений с использованием нечетких правил продукций заключается в том, чтобы на основе некоторых нечетких высказываний с известной степенью истинности, которые являются условиями нечетких правил продукций, оценить степень истинности других нечетких высказываний, являющимися заключениями соответствующих нечетких правил продукций.

Чтобы иметь возможность решить эту проблему, необходимо ответить на более частный вопрос: Чему должна быть равна степень истинности заключения отдельного нечеткого правила продукции, если известна степень истинности условия этого правила? Таким обра-

зом, в системах нечетких продукций центральное место занимает способ или метод определения истинности заключений в нечетком правиле продукции.

Нетрудно заметить, что взаимосвязь между условием и заключением в нечетком правиле продукции в общем случае представляет собой некоторое бинарное нечеткое отношение на декартовом произведении универсумов соответствующих нечетких высказываний. Этот подход и будет использоваться в дальнейшем для определения различных схем или методов нечеткого вывода на основе продукционных нечетких систем.

В общем случае для формального определения различных методов нечеткого вывода применительно к нечеткому правилу продукции рассмотрим два нечетких множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, заданных соответственно на универсумах X и Y. При этом нечеткое множество $\tilde{A}$ интерпретируется как условие некоторого нечеткого правила продукции, а нечеткое множество $\tilde{B}$ — как заключение этого же правила.

Основная идея заключается в том, что нечеткое множество $\tilde{A}$ можно рассматривать как унарное отношение на универсуме X, а нечеткое множество $\tilde{B}$ можно рассматривать как унарное отношение на универсуме Y. В этом случае первое отношение определяется функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$, а второе отношение— функцией принадлежности $\mu_{\tilde{B}}(x)$.

Теперь предположим, что некоторым образом определено бинарное нечеткое отношение на декартовом произведении универсумов: $\tilde{Q} = \{< x, y >, \mu_{\tilde{Q}}(< x, y >\}$, где $x \in X, y \in Y$. Если дополнительно известна функция принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ первого множества, то функция принадлежности $\mu_{\tilde{B}}(x)$ второго множества может быть определена в результате нечеткой композиции соответствующих нечетких отношений с использованием, например, формулы (5.17) для максиминной нечеткой композиции.

Кроме максиминной нечеткой композиции, предложены и другие способы для определения результата композиции нечетких отношений. Таким образом, для определения функции принадлежности нечеткого множества $\tilde{B}$ можно использовать следующие методы, основанные на различных расчетных формулах для определения функции принадлежности результата (приведены наиболее часто применимые в системах нечеткого вывода).

Max-min-композиция или максиминная нечеткая свертка:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \max_{x \in X}\{\min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{Q}}(< x, y >)\}\}. \tag{7.18}$$

Max-prod-композиция:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \max_{x \in X}\{\mu_{\tilde{A}}(x) * \mu_{\tilde{Q}}(< x, y >)\}. \tag{7.19}$$

Прямой и обратный методы вывода заключений в системах нечетких продукций

По аналогии с обычными продукционными системами важным компонентом систем нечетких продукций является так называемый метод или схема вывода заключений на основе нечетких условий в базе правил нечетких продукций. Наиболее известными являются два таких метода вывода заключений: прямой и обратный, особенности которых рассматриваются ниже.

Прямой метод вывода заключений в системах нечетких продукций, называемый также методом нечеткого восходящего вывода или методом прямой нечеткой цепочки рассуждений (fuzzy forward-chaining reasoning), основан на использовании нечеткого обобщения правила вывода модус поненс— FMP (fuzzy modus ponens, нечеткий модус поненс). Согласно Л. Заде, суть нечеткого модус поненс заключается в следующем. Классическая импликация $\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B}$ в правиле вывода MP заменяется на правило нечеткой продукции: "ЕСЛИ x есть $\tilde{A}$, ТО y есть $\tilde{B}$", где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — нечеткие множества, а само правило нечеткой продукции представляет некоторое нечеткое отношение между переменными x: и y, при этом $x \in X, y \in Y$. Что касается посылки $\tilde{A}$ правила MP, то она заменяется на нечеткое условие "x есть $\tilde{A}'$", где $\tilde{A}'$ — нечеткое множество, отражающее знания о реальном значении переменной x. Объединение правила нечеткой продукции и нечеткого условия позволяет получить новую информацию о значении переменной y в форме: "y есть $\tilde{B}'$". При этом заключение по правилу FMP получается

как функция принадлежности нечеткого множества $\tilde{B}'$ на основе функции принадлежности условия $\tilde{A}'$ и функции принадлежности нечеткой импликации как соответствующего нечеткого отношения с использованием одного из методов нечеткой композиции (7.18), (7.19).

Применительно к системам нечетких продукций прямой метод вывода реализуется посредством преобразования отдельных фактов проблемной области в конкретные значения функций принадлежности условий нечетких продукций. После этого преобразования по одному из методов нечеткой композиции находятся значения функций принадлежности заключений правых частей по каждому из правил нечетких продукций. Эти значения функций принадлежности либо являются искомым результатом вывода, либо могут быть использованы в качестве дополнительных условий в рассматриваемой базе правил нечетких продукций. При этом правила, которые могут быть использованы для выполнения нечеткой композиции, также называют *активными.*

Процесс вывода прямым методом в системах нечетких продукций в общем случае может иметь рекурсивный (итеративный) характер. Он может быть остановлен либо в случае отсутствия активных правил нечетких продукций, либо в случае получения функции принадлежности заключения, которое является целевым в контексте решения исходной проблемы. В этом случае функция принадлежности заключения характеризует успех процесса вывода в системах нечетких продукций и решение поставленной проблемы.

Обратный метод вывода в продукционных системах, называемый также методом нечеткого нисходящего вывода или методом обратной нечеткой цепочки рассуждений (fuzzy backward-chaining reasoning), основан на использовании нечеткого обобщения правила вывода модус толленс— FMT (fuzzy modus tollens, нечеткий модус толленс). Суть нечеткого модус толленс заключается в следующем. Классическая импликация $\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B}$ в правиле вывода МТ заменяется на правило нечеткой продукции: "ЕСЛИ x есть $\tilde{A}$, ТО y есть $\tilde{B}$ ", где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — нечеткие множества, а правило нечеткой продукции представляет некоторое нечеткое отношение между переменными x и y, при этом $x \in X, y \in Y$, как и в методе FMP. Заключение $\tilde{B}$ заменяется нечетким заключением в форме "является ли y $\tilde{B}'$" или "y есть $\tilde{B}'$?". При этом нечеткое множество $\tilde{B}'$ не равно нечеткому множеству $\tilde{B}$, используемому в заключении правила нечеткой продукции. Целью вывода методом обратной нечеткой цепочки рассуждений является установление истинности условия правила нечеткой продукции в форме: "является ли x $\tilde{A}'$" или "x есть $\tilde{A}'$?"". В этом случае заключение по правилу FMT получается как функция принадлежности нечеткого множества $\widetilde{A}'$ на основе функции принадлежности заключения $\tilde{B}'$ и функции принадлежности нечеткой импликации как соответствующего нечеткого отношения с использованием одного из методов нечеткой композиции (7.18), (7.19).

Принципиальное различие между обратными методами вывода заключений в нечетких и обычных системах продукций заключается в том, что применительно к системам нечетких продукций функции принадлежности условий неизвестны и должны быть как-то заданы. Процесс обратного вывода в системах нечетких продукций начинается с подстановки отдельных интересующих нас значений функции принадлежности заключений в правые части соответствующих правил нечетких продукций, которые в этом случае становятся *активными.* После анализа каждого из активных правил находятся функции принадлежности условий, которые используются в этих правилах. Эти функции принадлежности условий принимаются в качестве подцелей, которые могут быть использованы в качестве функций принадлежности новых заключений в рассматриваемой базе правил нечетких продукций.

Процесс вывода обратным методом также имеет рекурсивный (итеративный) характер. Он может быть остановлен либо в случае отсутствия новых активных правил, либо в случае получения значений функций принадлежности условий, которые подтверждаются фактами проблемной области. Подобное подтверждение условий характеризует успех процесса вывода и справедливость значений функции принадлежности исходных заключений.

Пример 7.5. В качестве примера нахождения заключений прямым методом вывода в системах нечетких продукций рассмотрим использование модифицированной базы правил для проблемной области, связанной к проверкой граждан на таможенном пункте контроля с целью исключения возможности провоза наркотиков.

В качестве системы нечетких продукций рассмотрим следующее множество правил нечетких продукций.

ПРАВИЛО_1: ЕСЛИ "Гражданин не является высокопоставленным чиновником", ТО "он подвергается таможенному досмотру" (F_1=1.0).

ПРАВИЛО_2: ЕСЛИ "Гражданин является высокопоставленным чиновником", ТО "он не подвергается таможенному досмотру" (F_2=0.9).

ПРАВИЛО_3: ЕСЛИ "Гражданин не подвергается таможенному досмотру", ТО "не исключается возможность провоза наркотиков" (F_3=0.8).

ПРАВИЛ0_4: ЕСЛИ "Количество граждан, проходящих таможенный осмотр, велико", ТО "контролер испытывает чувство усталости" (F_4=0.6).

ПРАВИЛО_5: ЕСЛИ "Контролер испытывает чувство усталости", ТО "не исключается возможность провоза наркотиков" (F_5=0.7).

ПРАВИЛО_6: ЕСЛИ "Гражданин подвергается таможенному досмотру" И "в отношении этого гражданина имеется агентурная информация", ТО "исключается возможность провоза наркотиков" (F_6=0.95).

ПРАВИЛО_7: ЕСЛИ "Гражданин подвергается таможенному досмотру" И "контролер использует новейшие технические средства", ТО "исключается возможность провоза наркотиков" (F_7=0.95).

При этом каждое из правил нечетких продукций имеет некоторый вес или коэффициент определенности F_k который определяет значимость правила или уверенность в степени истинности заключения, получаемого по отдельному нечеткому правилу. В качестве условий и заключений каждого из правил используются нечеткие высказывания.

Предположим, что на таможенном пункте контроля сложилась следующая текущая ситуация. Среди граждан, въезжающих в страну, находятся высокопоставленные чиновники (T=0.2). Количество граждан, проходящих таможенный осмотр, невелико (T=0.1). Таможенный пункт контроля оснащен новейшими техническими средствами (T=0.8). Какая-либо предварительная информация о наличии наркотиков у отдельных граждан отсутствует (T=0.9). Здесь в скобках указаны степени истинности соответствующих нечетких высказываний.

Проблема заключается в оценке истинности нечеткого заключения об исключении возможности провоза наркотиков через данный пункт контроля.

Рассмотрим один из возможных способов решения данной проблемы с использованием прямого метода вывода, правила max-min-композиции и нечеткой операции max-дизъюнкции для оценки одинаковых заключений. С этой целью последовательно рассмотрим все правила для получения соответствующих нечетких заключений.

Правило 1 позволяет получить нечеткое заключение о том, что "граждане будут подвергнуты таможенному досмотру". Степень истинности этого нечеткого высказывания равна: T=min{1–0.2, 1.0}= 0.8.

Правило 2 позволяет получить нечеткое заключение о том, что "граждане не будут подвергнуты таможенному досмотру". Степень истинности этого нечеткого высказывания равна: T=min{0.2, 0.9}= 0.2.

Правило 3 позволяет получить нечеткое заключение о том, что "не исключается возможность провоза наркотиков". Степень истинности этого нечеткого высказывания равна: T=min{0.2, 0.8}= 0.2.

Правило 4 позволяет получить нечеткое заключение о том, что "контролер испытывает чувство усталости". Степень истинности этого нечеткого высказывания равна: T=min{ 1–0.1, 0.6}= 0.6.

Правило 5 позволяет получить нечеткое заключение о том, что "не исключается возможность провоза наркотиков". Степень истинности этого нечеткого высказывания равна: T=min{0.6, 0.7}= 0.6.

Правило 6 позволяет получить нечеткое заключение о том, что "исключается возможность провоза наркотиков". Степень истинности этого нечеткого высказывания равна: T=min{min{0.8, 0.8}, 0.95}= 0.1.

Правило 7 позволяет получить нечеткое заключение о том, что "исключается возможность провоза наркотиков". Степень истинности этого нечеткого высказывания равна: T=min{min{0.8, 0.8}, 0.95}= 0.8.

Интересующее нас нечеткое высказывание является нечетким следствием правил 6 и 7. Объединяя степени истинности нечетких заключений, полученных с помощью этих правил, получим искомое значение истинности нечеткого высказывания о том, что для рассматриваемой ситуации "исключается возможность провоза наркотиков". Это значение равно: T=max{0.1, 0.8}= 0.8. Дополнительно можно получить степень истинности нечеткого высказывания о том, что "не исключается возможность провоза наркотиков". Это значение равно: T=max{0.6. 0.2}= 0.6 (см. правила 3 и 5).

Анализ этих значений истинности показывает, что сложившаяся ситуация на таможенном пункте контроля характеризуется высоким уровнем неопределенности и может потребовать от руководства принятия дополнительных мер. Одно из таких решений может быть связано со своевременной заменой контролеров с целью предотвращения их усталости. Это решение основано на том обстоятельстве, что относительно высокая степень истинности заключения "не исключается возможность провоза наркотиков" получается при использовании правила 5, условием которого является "контролер испытывает чувство усталости".

Примечание

Рассмотренная система правил нечетких продукций не претендует на законченность и служит лишь иллюстрацией применения основных идей нечеткой логики. В этой связи следует отметить, что реальные экспертные системы, основанные на правилах нечетких продукций, могут содержать сотни отдельных правил. В этом случае собственно процесс получение нечетких заключений может превратиться в серьезную проблему, имеющую самостоятельное значение и требующую дополнительных средств для своего конструктивного решения.

Тем не менее, даже этот простой пример показывает, что системы правил нечетких продукций позволяют не только получить более адекватное решение проблемы, но и менее строго относиться к противоречивости и полноте исходных правил. Действительно, наличие совокупности правил, которая приводит в обычной ситуации к взаимно исключающим заключениям, в нечеткой продукционной системе еще не служит признаком ее противоречивости. Безусловно, это является одним из достоинств правил нечетких продукций.

Не исключая возможности практического использования рассмотренных здесь нечетких продукционных систем и нечетких отношений, следует отметить, что наибольшее практическое применение нашли так называемые системы нечеткого вывода, в которых сделаны некоторые дополнительные предположения о форме нечетких высказываний, используемых в качестве условий и заключений в правилах нечетких продукций. Именно эти системы нечеткого вывода, рассмотрению которых посвящена следующая лекция, оказываются наиболее адекватным средством формализации экспертных знаний в самых различных проблемных областях и вывода соответствующих заключений.

Литература:

Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. — СПб.: БХВ Петербург, 2005. — 736 с.: ил.