# Лекция 3
# Функция принадлежности и методы ее построения

На практике удобно использовать те функции принадлежности, которые допускают аналитическое представление в виде некоторой простой математической функции. Это упрощает не только соответствующие численные расчеты, но и сокращает вычислительные ресурсы, необходимые для хранения отдельных значений этих функций принадлежности.

## 3.1. Классификация функций принадлежности

**Кусочно-линейные функции принадлежности**

В качестве первого типа функций принадлежности рассмотрим функции, которые, как следует из их названия, состоят из отрезков прямых линий, образуя непрерывную или кусочно-непрерывную функцию. Наиболее характерным примером таких функций являются *"треугольная"* (рис. 3.1, а) и *"трапециевидная"* (рис. 3.1, б) функции принадлежности. В нашем случае каждая из этих функций задана на универсуме $X$=[0, 10], в качестве которого выбран замкнутый интервал действительных чисел. В общем случае выбор универсума может быть произвольным, и не ограничен никакими правилами.

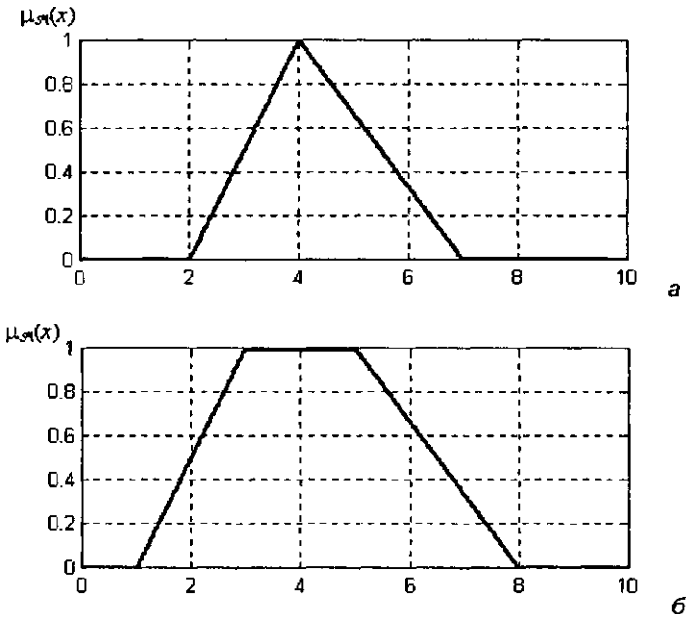



**Рис. 3.1.** Графики функций принадлежности треугольной (а) и трапециевидной (б) формы

Первая из этих функций принадлежности в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$f_{\Delta}(x;,a,b,c)=\begin{Bmatrix} 0, & x\le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b\le c\le x \\ 0, & c\le x \end{Bmatrix}, \tag{3.1}$$

где *a, b, c* — некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: $\boldsymbol{a \le b \le c}$.

Применительно к конкретной функции, изображенной на рис. 3.1, *а*, значения параметров равны: $a$=2, $b$=4, $c$=7. Как нетрудно заметить, параметры $a$ и $c$ характеризуют основание треугольника, а параметр $b$ — его вершину. Как можно заметить, эта функция принадлежности порождает нормальное выпуклое унимодальное нечеткое множество с носителем — интервалом *(a, c)*, границами *(a, c)* $\backslash\{b\}$, ядром $\{b\}$ и модой $b$.

*Трапециевидная* функция принадлежности в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$\boldsymbol{f_{\mathrm{T}}(x;, a, b, c, d)} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{0}, & \boldsymbol{x \le a} \\ \dfrac{\boldsymbol{x-a}}{\boldsymbol{b-a}}, & \boldsymbol{a \le x \le b} \\ \mathbf{1}, & \boldsymbol{b \le x \le c} \\ \dfrac{\boldsymbol{d-x}}{\boldsymbol{d-c}}, & \boldsymbol{c \le x \le d} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{d \le x} \end{matrix} \right\}, \qquad (3.2)$$

где *a, b, c, d*— некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: $\boldsymbol{a \le b \le c \le d}$.

Применительно к конкретной функции, изображенной на рис. 3.1, б, значения параметров равны: $a$=1, $b$=3, $c$=5, $d$=8. Как нетрудно заметить, параметры $a$ и $d$ характеризуют нижнее основание трапеции, а параметры $b$ и $c$— верхнее основание трапеции. При этом данная функция принадлежности порождает нормальное выпуклое нечеткое множество с носителем — интервалом ($a$, $d$), границами ($a$, $b$)∪($c$, $d$) и ядром [*b, c*].

Эти функции используются для задания таких свойств множеств, которые характеризуют неопределенность типа: "*приблизительно равно*", "*среднее значение", "расположен в интервале", "подобен объекту", "похож на предмет"* и др. Они также служат, для представления нечетких чисел и интервалов, которые будут рассмотрены далее.

**Z-образные и S-образные функции принадлежности**

Эти функции принадлежности также получили свое название по виду кривых, которые представляют их графики. Первая из функций этой группы называется Z-*образной* кривой или *сплайн-функцией* и в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$\boldsymbol{f_{z_1}(x;, a, b)} = \left\{ \begin{matrix} 1, & x \le a \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x-a}{b-a}\pi\right), & a \le x \le b \\ 0, & x > b \end{matrix} \right\}, \qquad (3.3)$$

где *a*, $b$ — некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: $a<b$. График этой функции для некоторого нечеткого множества $\tilde{\boldsymbol{A}}$ и универсума $X$=[0, 10] изображен на рис. 3.2, *а*, при этом значения параметров соответственно равны $a$=3, $b$=6.

*Сплайн-функция* может быть также задана другим выражением:

$$\boldsymbol{f_{z_2}(x;, a, b)} = \left\{ \begin{matrix} 1, & x \le a \\ 1 - 2\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2, & a < x \le \dfrac{a+b}{2} \\ 2\left(\dfrac{b-x}{b-a}\right)^2, & \dfrac{a+b}{2} < x < b \\ 0, & b \le x \end{matrix} \right\}, \qquad (3.4)$$

где *a*, $b$ — некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: $a<b$. График этой функции для некоторого нечетко-

го множества $\widetilde{A}$ и универсума $X$=[0, 10] изображен на рис. 3.2, б, при этом значения параметров соответственно равны $a$=3, $b$=6.

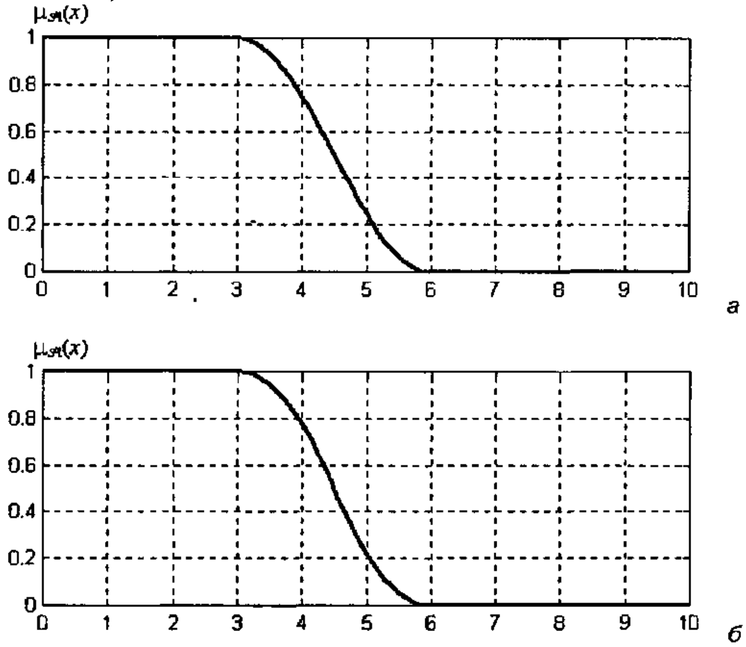



**Рис. 3.2.** Графики Z-образных функций принадлежности $f_{z1}$ и $f_{z2}$ для значений параметров $a$=3, $b$=6

**Примечание**

Хотя на первый взгляд различие между этими функциями едва уловимо, тем не менее оно существует, в чем можно убедиться посредством совмещения их графиков на одном рисунке.

Данные функции принадлежности порождают нормальные выпуклые нечеткие множества с ядром (-∞, $a$] и носителем (-∞, $b$).

Эти функции используются для представления таких свойств нечетких множеств, которые характеризуются неопределенностью типа: *"малое количество", "небольшое значение", "незначительная величина", "низкая себестоимость продукции", "низкий уровень цен или доходов", "низкая процентная ставка"* и многих других. Общим для всех таких ситуаций является слабая степень проявления того или иного качественного или количественного признака. Особенность нечеткого моделирования при этом заключается в представлении соответствующих нечетких множеств с помощью невозрастающих (монотонно убывающих) функций принадлежности.

Вторая из функций рассматриваемой группы называется S-*образной* кривой или *сплайн-функцией* и в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$\boldsymbol{f_{S1}(x;,a,b)} = \left\{ \begin{matrix} 0, & x < a \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x-b}{b-a}\pi\right), & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{matrix} \right\}, \quad (3.5)$$

где $a$, $b$ — некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: $a<b$. График этой функции для некоторого нечеткого множества $\widetilde{A}$ и универсума $X$=[0, 10] изображен на рис. 3.3, $a$, при этом значения параметров соответственно равны $a$=3, $b$=6.

*Сплайн-функция* может быть также задана другим выражением:

$$\boldsymbol{f}_{\mathbf{S2}}(\boldsymbol{x};,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ 2\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2, & a < x \le \dfrac{a+b}{2} \\ 1 - 2\left(\dfrac{b-x}{b-a}\right)^2, & \dfrac{a+b}{2} < x < b \\ 1, & b \le x \end{cases}, \tag{3.6}$$

где $a$, $b$ — некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: $a<b$. График этой функции для некоторого нечеткого множества $\tilde{\boldsymbol{A}}$ и универсума $X$=[0, 10] изображен на рис. 3.3, *б,* при этом значения параметров соответственно равны $a$=3, $b$=6.

Данные функции принадлежности порождают нормальные выпуклые нечеткие множества с ядром $[b, +\infty)$ и носителем $(a, +\infty)$.

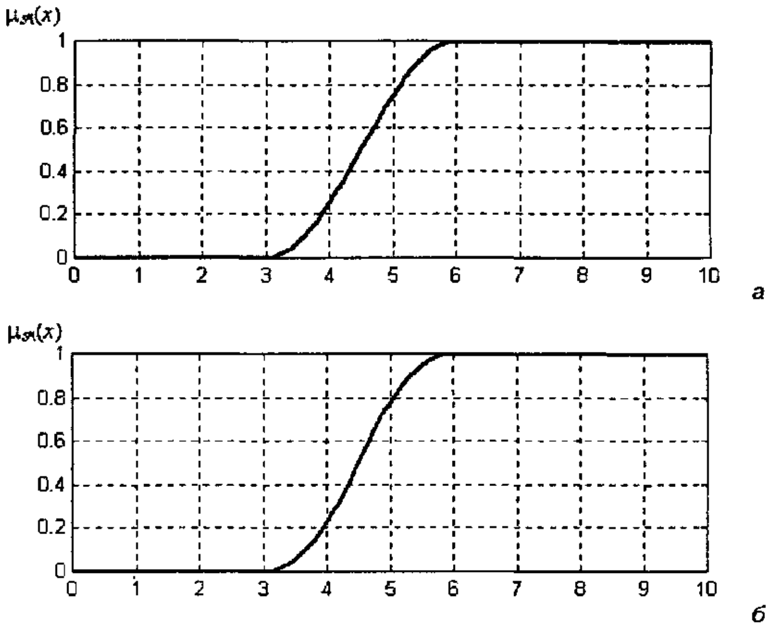



**Рис. 3.3**. Графики S-образных функций принадлежности $f_{S1}$ и $f_{S2}$ для значений параметров $a$=3, $b$=6

К типу S-образных и одновременно Z-образных функций принадлежности может быть отнесена так называемая *сигмоидальная* функция (сигмоид), которая в общем случае задается аналитически следующим выражением:

$$f_{S3}(x; a, b) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-b)}}, \tag{3.7}$$

здесь $a$, $b$— некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: $a<b$, а $e$— основание натуральных логарифмов, которое инициирует задание соответствующей экспоненциальной функции. При этом в случае $a$>0 может быть получена S-образная функция принадлежности, а в случае $a$<0 — Z-образная функция принадлежности.

Графики этой функции для некоторого нечеткого множества $\tilde{\boldsymbol{A}}$ и универсума $X$=[0, 10] изображены на рис. 3.4. При этом S-образной функции принадлежности соответствуют значения параметров $a$=3, $b$=6 (рис. 3.4, *а*), а Z-образной функции принадлежности соответствуют значения параметров $a$=-3, $b$=6 (рис. 3.4, *б*).

Данные функции принадлежности порождают субнормальные выпуклые нечеткие множества с носителем и границей $\mathbb{R}$ и точкой перехода $b$.

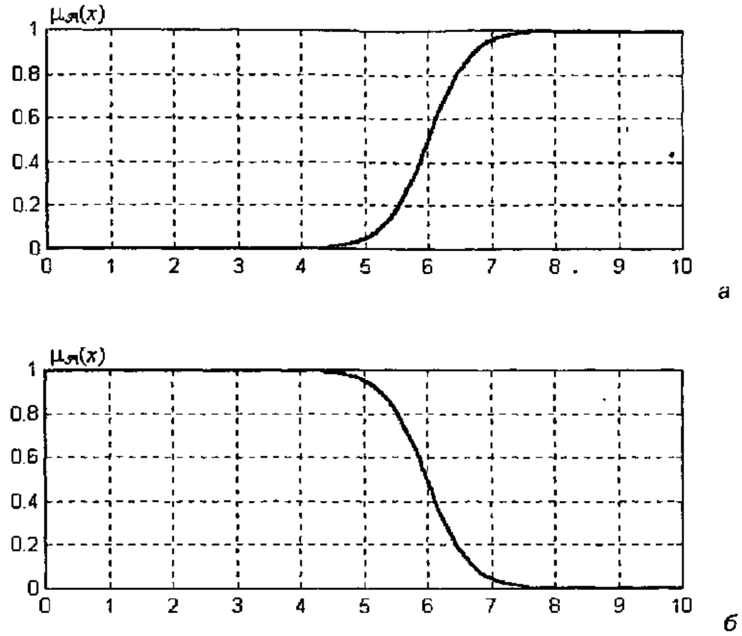



**Рис. 3.4.** Графики сигмоидальной функции принадлежности $f_{S3}$
для значений параметров $a$=3, $b$=6 (а) и $a$=-3, $b$=6 (б)

Рассмотренные S-образные функции используются для представления таких нечетких множеств, которые характеризуются неопределенностью типа: *"большое количество", "большое значение", "значительная величина", "высокий уровень доходов и цен", "высокая норма прибыли", "высокое качество услуг", "высокий сервис обслуживания"* и многих других. Общим для всех таких ситуаций является высокая степень проявления того или иного качественного или количественного признака. Особенность нечеткого моделирования при этом заключается в представлении соответствующих нечетких множеств с помощью неубывающих (монотонно возрастающих) функций принадлежности.

В качестве частных случаев Z- и 5-образных кривых удобно рассматривать так называемую *линейную Z-образную* функцию (рис. 3.5, *а*) и *линейную S-образную* функцию (рис. 3.5, *б*). Первая из этих функций в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$f_{\downarrow}(x;a,b)=\begin{Bmatrix} 1, & x\le a \\ \dfrac{b-x}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & b\le x \end{Bmatrix}, \tag{3.8}$$

где $a$, $b$ — некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: $a<b$. График этой функции для некоторого нечеткого множества $\tilde{\boldsymbol{A}}$ и универсума $X$=[0,10] изображен на рис. 3.5, *а*, при этом значения параметров соответственно равны $a$=3, $b$=6.

Вторая из этих функций в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$f_{\uparrow}(x;a,b)=\begin{Bmatrix} 0, & x\le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b \\ 1, & b\ge x \end{Bmatrix}, \tag{3.9}$$

где $a$, $b$ — некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: $a<b$. График этой функции для некоторого нечеткого множества $\tilde{\boldsymbol{A}}$ и универсума $X$=[0, 10] изображен на рис. 3.5, *б*, при этом значения параметров соответственно также равны $a$=3, $b$=6.

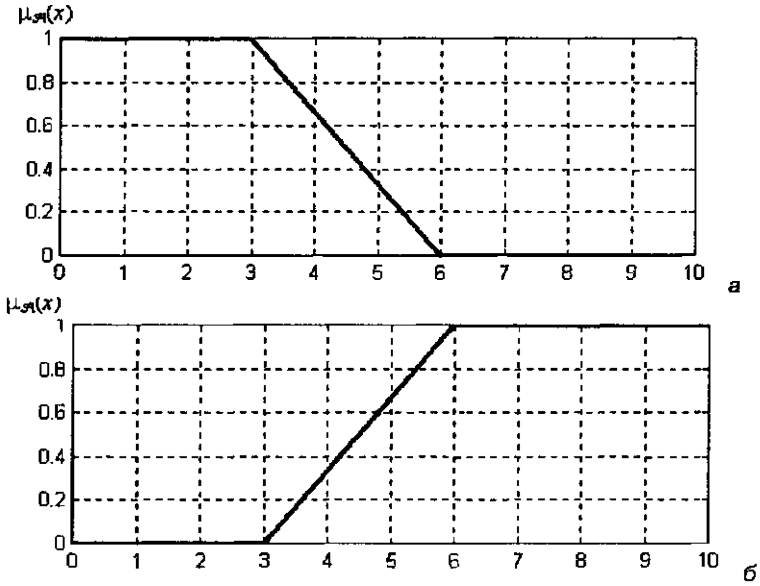



**Рис. 3.5**. Графики линейной Z-образной функции (а) и линейной S-образной функции (б) принадлежности для значений параметров $a$=3, $b$=6

Данные функции принадлежности порождают нормальные выпуклые нечеткие множества с границами ($a$, $b$).

Следует заметить, что данные линейные Z- и S-образные функции могут быть использованы для построения рассмотренных выше треугольной и трапециевидной функций принадлежности (см. рис. 3.1). В частности треугольная функция принадлежности получается как композиция линейной Z-образной и линейной S-образной функций по следующей формуле:

$$\boldsymbol{f}_{\Delta}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \min_{x\in X}\{\boldsymbol{f}_{\uparrow}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\boldsymbol{f}_{\downarrow}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\}, \qquad (\mathbf{3.10})$$

где $a$, $b$, $c$ — некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: $a \leq b \leq c$. В выражении (3.10) используется операция взятия минимума (обозначенная знаком min) из всех значений, указанных в фигурных скобках через запятую. При этом если соответствующие функциональные значения зависят от некоторой независимой переменной (в нашем случае от $x$), то под знаком минимума явно указывается диапазон или множество значений этой переменной (в нашем случае — универсум).

Трапециевидная функция принадлежности получается как композиция двух линейных Z-образной и S-образной функций по следующей формуле:

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) = \min_{x\in X}\{\boldsymbol{f}_{\uparrow}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\boldsymbol{f}_{\downarrow}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\}, \qquad (3.11)$$

где $a$, $b$, $c$, $d$ — некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: $a \leq b \leq c \leq d$.

**П-образные функции принадлежности**

К данному типу функций принадлежности можно отнести целый класс кривых, которые по своей форме напоминают колокол, сглаженную трапецию или букву "П".

Первая из подобных функций так и называется — П-*образная функция*, и в общем случае задается аналитически следующим выражением:

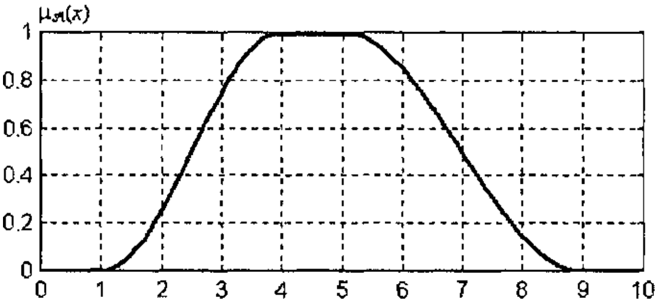
$$\boldsymbol{f}_{\Pi}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}), \qquad (3.12)$$

где $a$, $b$, $c$, $d$ — некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: $a \leq b \leq c \leq d$, а знак "·" обозначает обычное арифметическое произведение значений соответствующих функций.

При этом могут быть использованы любые из рассмотренных выше Z- и S-образных функций. В частности, если использовать функции $f_{Sl}$ и $f_{Z1}$ то получим П-функцию $f_{П1}$, график которой для некоторого нечеткого множества $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ и универсума *X*=[0, 10] изображен на рис. 3.6, *а*. При этом значения параметров для функции $f_{S1}$ равны *a*=1, *b*=4, а для функции $f_{Z1}$ — *c*=5, *d*=9. Если же использовать функции $f_{S2}$ и $f_{Z2}$, то получим П-функцию $f_{П2}$, график которой для некоторого нечеткого множества $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ и универсума *X*=[0, 10] изображен на рис. 3.6, *б* для тех же значений параметров.

Очевидно, этот тип функций принадлежности порождает нормальные выпуклые нечеткие множества с носителем (*a, d*) и ядром [*b, c*].


а




б

**Рис. 3.6.** Графики П-образных функций принадлежности $f_{П1}$ (а) и $f_{П2}$ (6)
для значений параметров a=1, b=4, c=5, d=9

Следующая функция этого типа *П-образных функций* определяется как произведение двух сигмоидальных функций и в общем случае может быть задана аналитически следующим выражением:

$$\boldsymbol{f}_{\text{П}3}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{S}3}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{S}3}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}), \tag{3.13}$$

где *a, b, c, d* — некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения, причем *a*>0, *c*<0, и упорядоченные отношением: a≤b<|c|≤d. Знак "·" обозначает арифметическое произведение значений соответствующих функций, а функция |x| — модуль действительного числа.

К *П*-образным функциям относится также так называемая *колоколообразная* (bell-shaped) *функция*, которая в общем случае задается аналитически следующим выражением:

$$\boldsymbol{f}_{\text{П}4}(\boldsymbol{x};,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) = \frac{1}{1 + \left|\frac{\mathrm{x}-\mathrm{c}}{\mathrm{a}}\right|^{2\mathrm{b}}}, \tag{3.14}$$

где *a, b, c*— некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением: *a*<*b*<*c*, причем параметр *b*>0. Здесь функция |x| обозначает модуль действительного числа

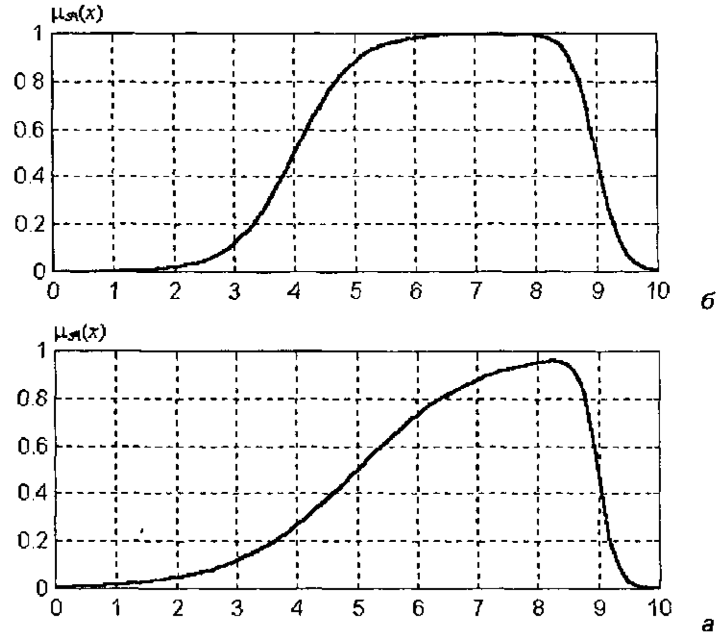



**Рис. 3.7.** Графики *П*-образных функций принадлежности $f_{П3}$ для значений параметров a=1, b=5, c=-7, d=9 (а) и для значений параметров a=2, b=4, c=-5, c/=9 (б)

Наконец, последней из рассматриваемых функций данного типа является хорошо известная в теории вероятностей функция плотности нормального распределения в предположении, что $\sqrt{\boldsymbol{2\pi\sigma}} = \mathbf{1}$, и которая в нашем случае задается аналитически следующим выражением:

$$\boldsymbol{f}_{\text{П}\mathbf{5}}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{c}) = e^{\frac{-(x-c)^2}{2\sigma^2}}. \tag{3.15}$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ и $c$ — числовые параметры, при этом квадрат первого из них $\boldsymbol{\sigma^2}$ в теории вероятностей называется *дисперсией* распределения, а второй параметр $c$ — *математическим ожиданием*.

Очевидно, эти последние типы функций принадлежности порождают нормальные выпуклые нечеткие множества.

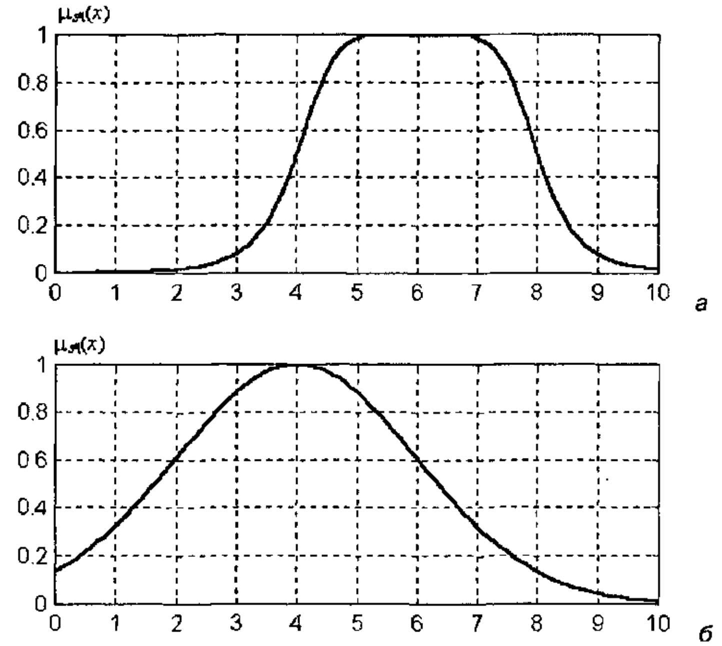



**Рис. 3.8.** Графики *П*-образных функций принадлежности $f_{П4}$ для значений параметров a=2, b=3, c-6 (а) и $f_{П5}$ для значений параметров c=2, c=4 (б)

## 3.2. Построение функций принадлежности

**Некоторые рекомендации по построению функций принадлежности нечетких множеств**

При построении функций принадлежности для нечетких множеств следует придерживаться некоторых правил, которые предопределяются характером неопределенности, имеющей место при построении конкретных нечетких моделей.

С практической точки зрения с каждым нечетким множеством удобно ассоциировать некоторое свойство, признак или атрибут, которые характеризуют рассматриваемую совокупность объектов универсума. При этом по аналогии с классическими множествами рассматриваемое свойство может порождать некоторый предикат, который вполне естественно назвать нечетким предикатом. Данный нечеткий предикат может принимать не одно из двух значений истинности (*"истина"* или *"ложь"*), а целый континуум значений истинности, которые для удобства выбираются из интервала [0,1]. При этом значению *"истина"* попрежнему соответствует число 1, а значению *"ложь"* — число 0. ,

Содержательно это означает следующее. Чем в большей степени элемент $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ обладает рассматриваемым свойством, тем более близко к 1 должно быть значение истинности соответствующего нечеткого предиката. И наоборот, чем в меньшей степени элемент $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ обладает рассматриваемым свойством, тем более близко к 0 должно быть значение истинности этого нечеткого предиката. Если элемент $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ *определенно* не обладает рассматриваемым свойством, то соответствующий нечеткий предикат принимает значение "*ложь*" (или число 0). Если же элемент $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ *определенно* обладает рассматриваемым свойством, то соответствующий нечеткий предикат принимает значение "*истина*" (или число 1).

Тогда в общем случае задание нечеткого множества с использованием специального свойства эквивалентно заданию такой функции принадлежности, которая содержательно представляет степень истинности соответствующего одноместного нечеткого предиката.

Наибольшее распространение при построении функций принадлежности нечетких множеств получили прямые и косвенные методы.

**Прямые методы построения функций принадлежности**

В прямых методах эксперт либо группа экспертов просто задают для каждого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ значение функции принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$. Как правило, прямые методы построения функций принадлежности используются для таких свойств, которые могут быть измерены в некоторой количественной шкале. Например, такие физические величины, как скорость, время, расстояние, давление, температура и другие имеют соответствующие единицы и эталоны для своего измерения. При этом целесообразно ограничить рассмотрение только теми значениями величин, которые имеют физический смысл в контексте решаемой задачи.

При прямом построении функций принадлежности следует учитывать то обстоятельство, что теория нечетких множеств не требует абсолютно точного задания функций принадлежности. Зачастую бывает достаточно зафиксировать лишь наиболее характерные значения и вид (тип) функции принадлежности.

Так, например, если необходимо построить нечеткое множество, которое представляет свойство "*скорость движения автомобиля около 50 км/ч*", на начальном этапе может оказаться достаточным представить соответствующее нечеткое множество треугольной функцией принадлежности $\boldsymbol{f}_{\Delta}$ с параметрами $a$ = 40 км/ч, $b$ = 50 км/ч и $c$ = 60 км/ч. Аналогично, в случае построения нечеткого множества для представления свойства "*скорость движения автомобиля находится приблизительно в пределах 50—60 км/ч*", на начальном этапе может оказаться достаточным представить соответствующее нечеткое множество трапециевидной функцией принадлежности $\boldsymbol{f}_{\mathbf{T}}$ с параметрами $a$ = 45 км/ч, $b$ = 50 км/ч, $c$ = 60 км/ч и $d$ = 65 км/ч. В последующем функция принадлежности может быть уточнена опытным путем на основе анализа результатов решения конкретных задач.

Процесс построения или задания нечеткого множества на основе некоторого известного заранее количественного значения измеримого признака получил даже специальное название — *фаззификация* или приведение к нечеткости. Речь идет о том, что хотя иногда нам бывает известно некоторое значение измеримой величины, мы признаем тот факт, что это значение известно неточно, возможно с погрешностью или случайной ошибкой. При этом, чем меньше мы уверены в точности измерения признака, тем большим будет интервал носителя соответствующего нечеткого множества. Следует помнить, что в большинстве практических случаев абсолютная точность измерения является лишь удобной абстракцией для построения математических моделей.

Именно по этой причине фаззификация позволяет более адекватно представить объективно присутствующую неточность результатов физических измерений.

**Косвенные методы построения функций принадлежности**

Как правило, косвенные методы определения значений функции принадлежности используются в тех случаях, когда отсутствуют очевидные измеримые свойства, которые могут быть использованы для построения нечетких моделей рассматриваемой предметной области.

Среди косвенных методов наиболее известен так называемый метод попарных сравнений. Этот метод используется для конечных нечетких множеств и основан на следующем предположении. Если бы значения искомой функции принадлежности были известны и равны значениям $\mu_{\tilde{A}}(x)$ для $i \in \{1, 2,...,n\}$, то попарные сравнения соответствующих элементов носителя нечеткого множества $\tilde{\boldsymbol{A}}$ можно было бы представить в виде матрицы А с элементами $a_{ij}$, при этом элементы этой матрицы равны: $\boldsymbol{a_{ij}} = \mu_{\tilde{A}}(x_i)/\mu_{\tilde{A}}(x_j)$, где символ "/" обозначает операцию деления.

На практике бывает проще вначале построить матрицу А в предположении, что ее диагональные элементы должны быть равны 1, а симметричные относительно главной диагонали элементы должны быть взаимно обратными, т.е. $\boldsymbol{a_{ij}}=1/\boldsymbol{a_{ji}}$. Последнее условие означает, что если степень принадлежности одного из элементов оценивается в $a$ раз сильнее степени принадлежности другого, то степень принадлежности второго элемента должна быть в $1/a$ раз сильнее степени принадлежности первого элемента.

В этом случае задача построения функции принадлежности сводится к нахождению такого вектора $w$, который является решением следующего уравнения:

$A \cdot w = \lambda_{\max} w,$

где $\lambda_{\max}$ — наибольшее собственное значение матрицы $A$. Поскольку все значения элементов матрицы А положительны по построению, решение данного уравнения существует и является положительным.

Собственно процесс попарного сравнения элементов может быть основан на субъективной интуиции или на выполнении некоторой последовательности алгоритмических или логических действий. При этом отдельные элементы универсума могут использоваться в качестве эталонов или все элементы могут быть разделены на группы с последующим сравнением этих групп между собой.

Из алгоритмических процедур наибольшую известность получили методы итеративного уточнения значений функций принадлежности, основанные на нейронных сетях и генетических алгоритмах. Логические процедуры используют методы индуктивного обучения и построения нечетких метаправил. Иногда применяются методы обработки статистических данных, факторного и дискриминантного анализа с целью выделения значимых признаков для последующего сравнения элементов рассматриваемого универсума.

В заключение следует отметить, что в случае недостатка информации об особенностях функций принадлежности нечетких переменных рекомендуется начинать построение нечеткой модели с использования наиболее простых форм функции принадлежности, а именно— кусочно-линейных функций. В последствии их характер может быть уточнен и учтен на этапе коррекции нечеткой модели.

**Литература:**

Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. — СПб.: БХВ Петербург, 2005. — 736 с.: ил.